V. FRAILE

ECUACIONES DIFERENCIALES
METODOS DE INTEGRACION Y CALCULO NUMERICO

SEGUNDA EDICION

tebar flores

Diseño portada: **Fernando Coquillat Blasco**

D.L.: 62–AB–1991
I.S.B.N.: 84–7360–105–X

Impreso en los talleres de la EDITORIAL **TEBAR FLORES**
Avda. de los Toreros 7. 02005–ALBACETE
Tel.: (967) 22 11 37

A la memoria de mi hermano Arturo

INDICE GENERAL

NOTA PRELIMINAR 9

CAPITULO 1. CONSIDERACIONES GENERALES. DISTRIBUCIONES Y FUNCIONES VALORADAS 11

0. Introducción 11
0.1. Consideraciones generales 11
0.2. Soluciones amplias de ecuaciones diferenciales 13
0.3. Simbolismo de las poligonales 14
1. Elementos sobre distribuciones 16
1.1. Norma 16
1.2. Compactos y soporte de una función 18
1.3. Funcionales 19
1.4. Distribuciones 21
1.5. Derivadas sucesivas de una distribución 23
1.6. Derivadas sucesivas de $|u(x)|$ en el sentido de las distribuciones 25
2. Cálculo directo de derivadas e integrales de las funciones valoradas 30
2.1. La función $s = |u|/u$ 30
2.2. Derivadas sucesivas de algunas funciones elementales valoradas 32
2.3. Integrales de funciones valoradas 34
2.4. Escalonadas 38
Presencia de la delta de Dirac en la ortogonalización de bases continuas de espacios de Hilbert 40
2.5. Poligonales 42
2.6. Escalonadas periódicas 43
NOTAS BIBLIOGRAFICAS 46
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS 48

CAPITULO 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 61

0. Introducción 61
0.1. Definiciones 61
0.2. Constantes arbitrarias de la solución general 62
0.3. Ecuación diferencial de una familia de curvas 64
1. Ecuaciones de la forma $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ 67
1.1. Ecuaciones de variabes separables 68
1.2. Ecuaciones homogéneas 69
1.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas 73
1.4. Diferenciales exactas 77
1.5. Factor integrante 81

2. Existencia y unicidad de las soluciones de la ecuacion $(dy/dx) = f(x, y)$ 88
2.1. Espacios métricos 88
2.2. Condición de Lipschitz 89
2.3. Sucesiones en un espacio métrico 90
2.4. Espacios métricos completos 91
2.5. Aplicaciones contractivas y teorema del punto fijo de Banach 92
Teorema de existencia y unicidad por el método de Picard 95
3. Ecuación lineal de primer orden 99
3.1. Obtención de la solución general 99
3.2. Problema de valores iniciales 101
4. Dependencia lineal de funciones y operadores diferenciales lineales 103
4.1. Funciones linealmente independientes 103
4.2. Operadores diferenciales lineales 104
5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes 107
5.1. Ecuación lineal homogénea 107
5.2. Ecuación lineal no homogénea 113
Método de la variación de las constantes 113
Método de los coeficientes indeterminados 118
6. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 120
6.1. Sistemas homogéneos 120
6.2. Sistemas no homogéneos 123
6.3. Sistema equivalente a una ecuación lineal 126
Problema de valores iniciales en una ecuación lineal de orden n 127
7. Algunas ecuaciones notables 129
7.1. Ecuación de Euler 129
7.2. Ecuación de Bernouilli 132
7.3. Ecuación de Riccati 134
7.4. Ecuación de Lagrange 136
7.5. Ecuación de Clairaut 138
8. Otros tipos especiales de ecuaciones 139
8.1. Ecuaciones de primer orden 139
8.2. Ecuaciones de segundo orden 143
8.3. Reducción de orden en una ecuación lineal 145
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS 146
PROPUESTOS 157
BIBLIOGRAFIA 159

CAPITULO 3. LA TRANSFORMACION DE LAPLACE 161

1. Introducción 161
2. Conceptos previos 162
2.1. Discontinuidades finitas 162
2.2. Continuidad a trozos 162
2.3. Orden exponencial 163
Consecuencias 164
3. Condiciones suficientes de existencia de la transformada de Laplace 166
4. Transformadas de las derivadas sucesivas de una función 167
5. Transformada de la integral de una función 169
6. Comportamiento de las transformadas cuando $p \to +\infty$ 170
7. Cálculo directo de algunas transformadas 172

7.1. Transformada de una escalonada 172
7.2. Transformadas de algunas funciones elementales 175
7.3. Transformada de una función periódica 176
8. Propiedades de algunas transformadas 177
8.1. Propiedades de traslación 177
8.2. Transformada de $f(kx)$ 179
8.3. Producto de $f(x)$ por x^n, $n \in \mathbb{N}$ 179
Transformada de x^n, $n \in \mathbb{N}$ 181
Transformada de una poligonal unívoca rectilínea 182
8.4. Transformada de $f(x)/x$ 184
9. La delta de Dirac y su transformada 185
9.1. Transformada de la derivada de una escalonada en el sentido de las distribuciones 187
10. Convolución 188
10.1. Teorema fundamental 189
Aplicación 190
11. Transformación inversa 192
11.1. Unicidad de la transformada inversa 192
11.2. Transformadas inversas de ciertas funciones racionales algebraicas 193
12. Integrales de la forma $\int_0^\infty (f(x)/x)\,dx$ 197
13. La función gamma de Euler 198
TABLA DE TRANSFORMADAS 201
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS 206
PROPUESTOS 214
BIBLIOGRAFIA 215

CAPITULO 4. ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCILES . 217

1. Definiciones 217
2. Obtención de una ecuación en derivadas parciales por eliminación de funciones arbitrarias 219
3. Repaso de algunas nociones de análisis vectorial 221
3.1. Vector de posición 221
3.2. Vector unitario tangente a una curva 222
3.3. Función gradiente 224
4. Ecuación casi lineal de primer orden en derivadas parciales 225
4.1. Curvas características 228
4.2. Sistema característico 229
4.3. Solución general de la ecuación $P(x, y, z)(\partial z/\partial x) + Q(x, y, z)(\partial z/\partial y) = R(x, y, z)$ 231
4.4. Algunas formas de obtener integrales del sistema característico 233
5. Ecuación lineal de primer orden 240
6. El problema de Cauchy 242
7. Ecuación general de primer orden 247
7.1. Integral completa e integral general 247
7.2. Método de Lagrange-Charpit 251
8. Ecuaciones de segundo orden 254
8.1. Operadores lineales parciales 254
8.2. Ecuaciones lineales de segundo orden en derivadas parciales 256

EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS 260
PROPUESTOS 269
BIBLIOGRAFIA 270

CAPITULO 5. CALCULO NUMERICO DE SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 271

0. Introducción 271
1. Métodos monopaso 275
1.1. Aplicación del desarrollo de Taylor 275
1.2. Método de Euler y acotación de los errores 278
1.3. Método predictor-corrector de Euler 283
1.4. Métodos de Runge-Kutta 285
Control del paso 289
2. Métodos multipaso 291
2.1. Fundamentos 291
2.2. Método de Adams-Bashforth 293
2.3. Método predictor-corrector de Adams-Moulton 294
2.4. Métodos de Milne 295
BIBLIOGRAFIA 295

APENDICE DIFERENCIAS FINITAS, INTERPOLACION Y ECUACIONES EN DIFERENCIAS 297

1. Diferencias finitas 297
1.1. Definiciones 297
1.2. Factoriales o potencias generalizadas 300
1.3. Algunas propiedades 301
2. Interpolación 303
2.1. Polinomio interpolador con diferencias progresivas 303
2.2. Polinomio interpolador con diferencias regresivas 305
2.3. Aplicación al cálculo numérico de ecuaciones diferenciales 307
3. Ecuaciones en diferencias finitas 309
3.1. Ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes 309
3.2. Ecuación lineal no homogénea 311
3.3. Problema de Cauchy 313
4. Cálculo de las potencias sucesivas de una matriz 313
Aplicación a un ejemplo 317
EJERCICIOS Y PROBLLEMAS RESUELTOS 319

Soluciones a los ejercicios y problemas propuestos 325

NOTA PRELIMINAR

En esta segunda edición del libro, ofrecida ahora al lector, he añadido un nuevo capítulo y he reformado sustancialmente el primero. El apéndice está discretamente ampliado. Y he retocado algunos puntos de los capítulos segundo y cuarto.

El capítulo añadido está dedicado a la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es una cuestión prácticamente insoslayable en una obra de este género. Y si en la primera edición no apareció fue por la necesidad de no dilatar demasiado los plazos de entrega. He procurado explicar el cálculo numérico –como todo lo demás– con la mayor claridad que soy capaz de extraer de mi larga experiencia ante los alumnos.

El primer capítulo –insólito para muchos lectores– tiene ahora un tratamiento mejor sincronizado con el resto de la obra. Su primera parte es una exposición de consideraciones generales sobre las ecuaciones diferenciales y la conexión de éstas con el estudio de los fenómenos físicos. Hago hincapié en ciertas funciones que no son completamente regulares y satisfacen a determinadas ecuaciones como soluciones "amplias" de las mismas; y entre estas soluciones posibles están las poligonales unívocas. Su incorporación al cálculo diferencial nos conduce a las "distribuciones" de L. Schwartz, cuyos fundamentos elementales se expone cuidadosamente; pero antes se incluye conceptos y propiedades necesarios para abordar dicho tema. Asimismo, se desarrolla otro método de cálculo simbólico muy ventajoso para derivar e integrar funciones con argumentos tomados en valor absoluto, comparando sus resultados con los del método de las distribuciones.

En el apéndice he añadido el polinomio interpolador de Newton–Gregory con diferencias regresivas y su preparación para ser utilizado en los algoritmos de paso múltiple de la integración numérica de ecuaciones. En los capítulos restantes hay sólo, como he dicho antes, ligeros retoques.

Creo que los ejemplos y ejercicios intercalados en el texto, y los problemas resueltos y propuestos, contribuyen a la mejor comprensión del estudio de los métodos de integración, y también del análisis expuesto en el primer capítulo.

En los párrafos de gratitud son protagonistas, en primer lugar, los lectores de la primera edición de este libro, que han hecho posible la aparición de la segunda.

La reorganización del capítulo primero, especialmente lo que se refiere a soluciones irregulares y la introducción a las distribuciones, ha contado con la colaboración fundamental de mi hijo José Mª, que es profesor de la Universidad Complutense de Madrid. También he tenido la importante colaboración de otros dos hijos, Ramón y Francisco Javier (matemático e ingeniero, respectivamente) en el propio tema de las

distribuciones y la delta de Dirac. Así, pues, queda renovada la gratitud a mi mujer y todos mis hijos, expresada en la primera edición.

Mi gratitud también al catedrático y gran matemático Carlos Conde Sánchez, que ha revisado pacientemente todo el original de la obra y me ha dado importantes consejos.

Recuerdo de nuevo a mi compañero en las tareas docentes Ignacio Salinas por su contribución entusiasta a la redacción de los primeros originales.

Finalmente, agradezco la crítica sospechosamente desapasionada que ha hecho del texto de esta segunda edición mi fraternal amigo y hondo pensador José García Cañas.

V. Fraile

CAPITULO 1

CONSIDERACIONES GENERALES. DISTRIBUCIONES Y FUNCIONES VALORADAS

0. INTRODUCCION

0.1.– Las ecuaciones diferenciales tuvieron un origen de carácter puramente matemático, porque nacieron con el cálculo infinitesimal de Newton y Leibnitz. El destino inmediato de estas ecuaciones fue, sin embargo, la explicación de los fenómenos físicos. Ellas fueron la estructura misma de la Mecánica clásica, y continuaron siendo el tejido de la Física en general. Los fenómenos de la mecánica de sólidos y fluidos, los del calor, la luz y el electromagnetismo llegaron a ser mejor comprendidos cuando se encontró para ellos modelos matemáticos cuyo fundamento eran las ecuaciones diferenciales obtenidas de un estudio puntual o instantáneo en la evolución de esos fenómenos. Aquellos modelos siguieron siendo válidos después de que las nuevas ideas trajeran la Física cuántica y relativista. También ellas los utilizan. Pero hoy las ecuaciones diferenciales y, en general, las ecuaciones funcionales son asimismo el soporte que permite estudiar fenómenos incluidos en otras ciencias, como la Economía, la Biología, etc.

Las incógnitas que figuran en las ecuaciones diferenciales no son números desconocidos que hay que encontrar; son funciones escalares o vectoriales. Los símbolos de estas funciones aparecen en dichas ecuaciones en forma de derivadas –desconocidas, por supuesto– o diferenciales de una función que debemos hallar. También puede figurar simbolizada la propia función. Si y es la función desconocida, una ecuación diferencial en y es, por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (x-1)e^x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 y = e^{2x}.$$

Aquí se advierte que y es función de una sola variable x. Si la función desconocida fuese $z(x, y)$, una ecuación diferencial en z sería, también como muestra,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2xz\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = x + y,$$

en la cual aparecen, naturalmente, derivadas parciales.

Ya hemos dicho que los fenómenos físicos son estudiados de una manera local; es decir, en el entorno de un punto o un instante de su proceso evolutivo, y de esta

forma se llega a establecer las ecuaciones diferenciales de los mismos. Supongamos, por ejemplo, un campo eléctrico con una densidad de carga $\rho(x, y, z)$, y sea $U(x, y, z)$ el potencial del campo. Pues bien, este potencial U satisface a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

donde ε_0 es una constante y f la función desconocida de tres variables independientes x, y, z. Esto quiere decir que la igualdad

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

es una identidad. Se trata de la conocida ecuación de Poisson.

Como vemos, las ecuaciones diferenciales son relaciones entre magnitudes locales. Poseen, pues, un carácter infinitesimal, que no tienen las ecuaciones numéricas del Algebra. Se dice que estas últimas son de carácter finito.

El cálculo que conduce a la solución exacta o aproximada de una ecuación diferencial, o un sistema de ellas, recibe el nombre genérico de *integración* de esa ecuación o sistema, aunque no se haya empleado integral alguna. Toda solución particular de una u otro es una *función integral*. Esta función será una *curva integral* si sólo existe una variable independiente; si hay dos, es una *superficie integral*; en general, será una *variedad integral* de dimensión m cuando la solución tiene m variables independientes.

En el capítulo 2 de este libro, y en los siguientes, realizamos esta integración —la integración exacta, cuando es posible—, empezando por considerar las ecuaciones donde la función incógnita tiene una sola variable independiente. Se les llama entonces *ecuaciones diferenciales ordinarias*. En el capítulo 4 tratamos de ecuaciones cuya función incógnita tiene más de una variable independiente, y por esta razón son *ecuaciones en derivadas parciales*. La integración aproximada, o numérica, se expone con detalle en el capítulo 5. El tercero lo hemos reservado al práctico método de la transformación de Laplace. Finalmente, hay un apéndice dedicado a diferencias finitas, interpolación y ecuaciones en diferencias. Este apéndice debe ser consultado antes de leer los métodos numéricos de paso múltiple incluidos en el capítulo 5.

A las ecuaciones diferenciales, o sistemas, derivados del proceso de construcción de un modelo matemático para ciertos fenómenos físicos —en sentido amplio, Física, Química, Biología, Ecología, etc.— se les puede exigir soluciones que presenten otras características, además de la obligación de satisfacer las propias ecuaciones a las que haya conducido el modelo. Por ejemplo, el hecho de que las soluciones que se busca y algunas de sus derivadas deban tener necesariamente ciertos valores en instantes concretos de la variable respecto a la cual se mide la evolución del fenómeno. Si tales requisitos se refieren a un único instante, se dice que el problema es de *valores iniciales*; pero si las condiciones previas se refieren a instantes o puntos total o parcialmente distintos, diremos que estamos ante un *problema de contorno*.

Hay otras ecuaciones donde la función desconocida, o algunas de sus derivadas, aparece bajo un signo integral, pudiendo figurar también en otros términos exterio-

res. Son las llamadas "ecuaciones integrales" y "ecuaciones integrodiferenciales". Por ejemplo:

$$y(x) = c + \int_a^x t^2 y'(t)\, dt,$$

cuya función incógnita es $y(x)$.

0.2.– En un primer examen, si una función $u(x)$ satisface a una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo $[a, b]$, es claro que $u(x)$ ha de ser derivable una o varias veces en dicho intervalo, puesto que en la ecuación figuran los símbolos de una o más derivadas de diferentes órdenes de la función incógnita. Sin embargo, puede haber determinadas funciones que no son derivables en todo $[a, b]$, sino *para casi todo* $x \in [a, b]$, y que son también soluciones de la ecuación. Cuando una ecuación diferencial es satisfecha por funciones de esta clase convendremos en llamar a dichas funciones *soluciones amplias* de esa ecuación.

Veamos esto con algún cuidado. Sea la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); x \in [a, b]. \tag{0.2a}$$

Puesto que y es función de x, el segundo miembro puede ser escrito así:

$$f(x, y(x)).$$

Integremos (0.2a) entre $x_0 \in [a, b]$ y un x cualquiera del mismo intervalo. Será:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\, dt, \tag{0.2b}$$

que es una ecuación integral, cuya función incógnita $y(x)$ figura en el primer miembro y también bajo el signo integral del segundo. La ecuación diferencial (0.2a) es equivalente a (0.2b) siempre que exista

$$\int_a^b f(x, y(x))\, dx$$

y sea finita. Si $f(x, y(x))$ es integrable Riemann, la función f puede tener, por ejemplo, un número finito de saltos en $[a, b]$, de oscilación finita. Un caso más general: si $f(x, y(x))$ es integrable Lebesgue, f puede ser irregular en subconjuntos de puntos de $[a, b]$ que tengan medida nula. Entonces, y aun con esas irregularidades, existe

$$\int_a^b f(x, y(x))\, dx,$$

que es finita y, por lo tanto, la ecuación diferencial (0.2a) es equivalente a (0.2b).

Antes de seguir, es necesario que sepamos lo que se entiende por "continuidad absoluta" de una función. Se dice que $y(x)$ es *absolutamente continua* en $[a, b]$, si y sólo si:

1°) Es continua en $[a,b]$.

2°) $\exists y'(x)$ en casi todo $x \in [a,b]$.

3°) Existe y es finita la integral $\int_a^b y'(x)dx$.

Toda función $y(x)$ que haga que $f(x,y(x))$ sea integrable en $[a,b]$ y además satisfaga a (0.2b) será una solución de esta ecuación integral. Entonces, $y(x)$ es absolutamente continua en $[a,b]$ y es derivable en dicho intervalo salvo, quizás, en un subconjunto de puntos de medida nula. Aun así, su derivada es integrable; es decir, existe $\int_a^b y'(x)dx$, y es finita. En resumen: se podrá derivar (0.2b), y tendremos:

$$y'(x) = f(x,y(x))$$

en casi todo punto de $[a,b]$. O sea, tal función $y(x)$ puede considerarse como "solución amplia" de (0.2a), con regularidad absolutamente continua en $[a,b]$.

Usando la información anterior, dada la ecuación (0.2a), lo que se hace es tratar de resolver (0.2b), buscando que las soluciones sean absolutamente continuas, con el fin de poder ser consideradas soluciones amplias de la ecuación diferencial. Carathéodory estableció las condiciones suficientes que debe cumplir $f(x,y)$ para que (0.2a) posea esta clase de soluciones.

0.3.– Toda poligonal unívoca en $I \subseteq \mathbb{R}$, rectilínea o curvilínea, es derivable para casi todo x. Si es rectilínea, carece de derivada en todos los vértices, sin excepción. Si es curvilínea, puede haber vértices que sean empalmes tangenciales de dos arcos de curvas diferentes, y habrá derivada en ellos; o puede haberlos con tangente única, aunque sean puntos angulosos, en cuyo caso hay derivada infinita. En adelante vamos a considerar poligonales $p_j(x)$ –referidas a dos ejes ortogonales– que cumplan las siguientes condiciones: son rectilíneas o curvilíneas; si son curvilíneas:

A) Los lados son arcos de curvas regulares y no tienen tangente vertical en ninguno de sus puntos, aunque las curvas completas pueden tenerlas fuera de los intervalos de sus lados respectivos.

B) Carecen de derivada en todos los vértices. Así, pues, ninguna de las dos tangentes en un vértice a los dos lados que concurren en él es vertical (o sea, no hay derivadas laterales infinitas). Este conjunto $\{p_j(x)\}$ comprende también, naturalmente, a las poligonales mixtas con lados rectos y curvos en cada una.

Las poligonales $p_j(x)$ son absolutamente continuas, pues cumplen las tres condiciones que definen esa continuidad. Las dos primeras son evidentes; y como la derivada de una cualquiera tiene discontinuidades finitas en puntos discretos de $I \subseteq \mathbb{R}$, la referida derivada es integrable Riemann, cumpliéndose así la tercera condición. Por lo tanto, si una poligonal $p_k(x) \in \{p_j(x)\}$ es solución de la ecuación integral (0.2b), también lo es de la ecuación diferencial (0.2a) para casi todo valor de x; es decir $p'_k(x) = f(x,p_k(x))$, y sería una solución amplia.

Estamos viendo la posibilidad de que una ecuación diferencial ordinaria tenga, como soluciones amplias, poligonales del tipo de las $p_j(x)$. Pero para ello es forzoso que dispongamos, de alguna manera, de expresiones funcionales simbólicas que nos permitan incorporar al cálculo diferencial esas poligonales. Hemos de saber derivar, y también integrar, la expresión que represente a una poligonal, sin trocearla; y asimismo la que represente a una función salto con oscilaciones finitas (entre las cuales figurarán las escalonadas). Es sabido que esto se logra con el recurso de los valores absolutos.

La expresión más sencilla de una poligonal *rectilínea* unívoca cualquiera es:

$$y = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \ldots + a_n|x - x_n| + bx + c, \tag{0.3a}$$

donde x_i son las abscisas de los n vértices, ordenadas de menor a mayor, y a_i, b, c son constantes, debiendo ser las a_i distintas de cero.

Efectivamente, los lados de la poligonal (las rectas que los contienen) salen de (0.3a) considerando los intervalos $(-\infty, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n)$. Para $x < x_1$, la ecuación (0.3a) se convierte en la recta

$$y = (b - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n)x + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c.$$

Para $x_1 < x < x_2$, la ecuación será

$$y = (b + a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_n)x + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}x_{i+1} - a_1 x_1 + c,$$

que es una recta *distinta de la anterior*. Ambas se cortan en $x = x_1$, y la ordenada de este vértice es

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1}(x_{i+1} - x_1) + bx_1 + c$$

De la misma manera se va hallando los lados siguientes, que no son colineales cuando son adyacentes.

Si la poligonal es curvilínea, perteneciente al conjunto $\{p_j(x)\}$ establecido antes, puede encontrarse también una sola expresión que la describa. Si los lados de la poligonal, contados de izquierda a derecha, pertenecen a las curvas $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ respectivamente, una ecuación de esta poligonal es:

$$y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x - x_1|}{x - x_1}\right) f_0(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{|x - x_1|}{x - x_1} - \frac{|x - x_2|}{x - x_2}\right) f_1(x) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{|x - x_n|}{x - x_n} + 1\right) f_n(x) \tag{0.3b}$$

Vemos que cuando $x < x_1$, todo lo que hay en los paréntesis se anula, excepto lo del primero, que vale 2, y será, pues, $y = f_0(x)$ en $(-\infty, x_1)$. Cuando $x_1 < x < x_2$, todas

las expresiones entre paréntesis se anulan, menos la del segundo, y tenemos $y = f_1(x)$ en (x_1, x_2); etc.

La ecuación (0.3b) tiene el inconveniente de no estar definida en $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pero se advierte que por ser los límites de todas las fracciones $|x - x_i|/(x - x_i)$ iguales a -1 cuando $x \to (x_1-)$, el límite $y(x_1-)$ será $f_0(x_1)$; y por ser los límites de esas mismas fracciones iguales también a -1 cuando $x \to (x_1+)$, excepto el de $|x-x_1|/(x-x_1)$, que es $+1$, tendremos: $y(x_1+) = f_1(x_1)$. Ambos límites son iguales, puesto que x_1 es la abscisa del vértice formado por las curvas $f_0(x)$ y $f_1(x)$. En general, $f_{k-1}(x_k) = f_k(x_k)$. El valor de la expresión (0.3b) en los puntos x_i queda así determinado adjudicándole el de los límites en ellos.

Ya tenemos, pues, una sola expresión simbólica para una poligonal rectilínea y otra para una curvilínea, ambas del conjunto $\{p_j(x)\}$. Pero ¿cómo derivaremos e integraremos (0.3a) y (0.3b)? ¿Cómo integraremos sus presuntas derivadas? Porque es indudable que estas expresiones simbólicas han de ser sometidas al cálculo diferencial. Esto se lograría si supiéramos atribuir una noción razonable de "derivada" a las formas $|x - x_k|$ y $|x - x_k|/(x - x_k)$. Podemos plantearnos esto de una manera más general: si $u(x)$ es derivable en $I \subset \mathbb{R}$, ¿cuál es la derivada de $|u|$ y la de $|u|/u$ en I? Para ello acudiremos a la *Teoría de las distribuciones* de L. Schwartz.

Hay numerosas funciones que no se comportan con la suficiente regularidad para ser tratadas como unidades por el cálculo diferencial. Las hay continuas que son derivables a trozos, como las poligonales que acabamos de ver; incluso hay funciones continuas sin derivada en ningún punto. O pueden carecer de límites laterales en conjuntos de puntos de medida nula. Una "función salto" es otro ejemplo de irregularidad frente a la derivación de una expresión simbólica única que pueda representarla; etc. Pero a veces, al estudiar ciertos fenómenos físicos, construyendo para ellos un modelo matemático, aparecen funciones de esta clase, que requieren establecer, por ejemplo, una definición de lo que podría ser, razonablemente, su derivada.

Laurent Schwartz creó su teoría de las distribuciones, que permite dar un sentido a la derivada de funciones que presentan determinadas irregularidades. Se dice entonces que se trata de la derivada de una función *en el sentido de las distribuciones*.

A continuación exponemos los fundamentos elementales de esta teoría.

1. ELEMENTOS SOBRE DISTRIBUCIONES

Recordaremos antes algunos conceptos y propiedades que van a intervenir en el desarrollo de este tema.

1.1. Norma

La noción de proximidad va unida a la de distancia geométrica en los conjuntos de puntos. Por ejemplo, en la recta real, dos puntos o números a y b están muy próximos cuando su distancia $|a-b|$ es muy pequeña. Si se trata de un espacio vectorial V cuyos

elementos no son números, podemos definir una cierta aplicación de V en $\mathbb{R}^+$, que escribiremos $\| \cdot \|$ y llamaremos *norma*, a cargo de la cual va a correr la noción de proximidad en V.

Si llamamos v a un elemento genérico de V, toda norma $\| v \|: V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ha de cumplir las propiedades siguientes:

i) $\|v\| = 0$ si y solamente si $v = 0$

2i) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\quad \forall v \in V$

3i) $\|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\|, \quad \forall v_1, v_2 \in V$

Por ejemplo, consideremos el conjunto $C\Big([0, 1]\Big)$ de todas las funciones f continuas en $[0, 1]$, que es un espacio vectorial. Una norma en este espacio puede ser

$$\|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|,$$

que para cada función f nos da un número real no negativo, y verifica las tres propiedades establecidas, pues

i) Es evidente

2i) $\|\alpha f\| = \max_{[0,1]} |\alpha f| = \max_{[0,1]}(|\alpha| \ |f|) = |\alpha| \max_{[0,1]} |f| = |\alpha| \, \|f\|,$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\quad \forall f \in C\Big([0, 1]\Big)$

3i) $\|f_1 + f_2\| = \max_{[0,1]} |f_1 + f_2| \leqslant \max_{[0,1]} |f_1| + \max_{[0,1]} |f_2| = \|f_1\| + \|f_2\|,$
$\forall f_1, f_2 \in C\Big([0, 1]\Big)$.

Después de haber fijado una norma en un espacio vectorial V de elementos v, podemos considerar el concepto de "proximidad" definiendo una distancia d entre dos elementos cualesquiera de V del siguiente modo: $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$. En nuestro ejemplo anterior sería:

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\| = \max_{[0,1]} |f_1(x) - f_2(x)|; \ f_1, f_2 \in C\Big([0, 1]\Big).$$

Diremos que aquí hemos empleado la métrica del máximo.

Cuando en un espacio vectorial se establece una norma, se dice de él que es un "espacio vectorial normado".

Si una aplicación $V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ posee las propiedades 2i) y 3i) de una norma, pero no la i), a dicha aplicación se le llama *seminorma*, y puede anotarse $\| \cdot \|^*$.

1.2. Compactos y soporte de una función

Es claro que en la recta real hay intervalos cerrados no acotados; la propia recta lo es. El complementario de un intervalo abierto acotado (a, b) es el cerrado $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$, no acotado. En el plano, si a un círculo Q se le despoja de su circunferencia frontera, tenemos un abierto acotado (todos sus puntos son interiores, a distancia finita del centro); el complementario de este abierto es el cerrado no acotado constituido por la circunferencia suprimida y todos los puntos exteriores a Q. Ejemplos análogos pueden ser formulados en un espacio E_n.

Pues bien: *Todo conjunto cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita es un "compacto"*. Por ejemplo, un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con a y b finitos. También un punto cualquiera $x_0 \in \mathbb{R}$ es, él mismo, un cerrado acotado y, por lo tanto, un compacto.

Llamamos "soporte" de una función f, y lo escribiremos con el símbolo sop(f), *al menor cerrado fuera del cual f es nula.* Excepto la función que es nula idénticamente en $\mathbb{R}$, las demás tienen soporte. Incluso a esta excepción le podemos atribuir como soporte el conjunto vacío.

La gráfica de la figura 1.a representa una función nula en toda la recta real menos en los intervalos abiertos (a, b) y (c, d). Su soporte es la unión de los dos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$; en el exterior de cualquier otro cerrado contenido en $[a, b] \cup [c, d]$ hay puntos donde la función no es nula. En este ejemplo, el soporte es la unión de dos compactos y, por lo tanto, es un soporte compacto.

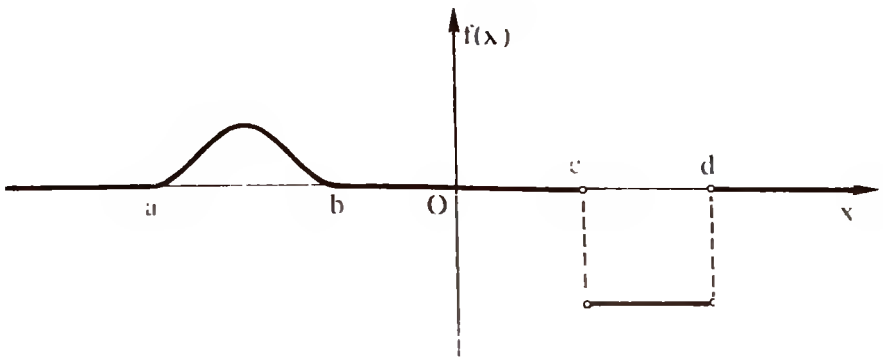


Figura 1.a

La definición de soporte no impide que una función sea cero en puntos de su soporte; incluso el conjunto de tales puntos puede tener medida no nula. Pero los puntos del soporte en los cuales se anula la función son puntos de adherencia del conjunto de los puntos donde la función no es cero; es decir, si $x_0 \in \text{sop}(f)$ y $f(x_0) = 0$, en *todo* entorno de x_0 hay puntos donde f no es nula. En la gráfica 1.a, los extremos a, b del primer intervalo pertenecen a su soporte, y en ellos se anula la función; pero son

puntos de adherencia del abierto (a, b) donde no se anula. También lo son los extremos c y d del segundo intervalo, en los cuales la función tiene discontinuidad finita y no está definida. En cambio, no son puntos de adherencia, por ejemplo, los del intervalo abierto (b, c).

Podemos, pues, dar otra definición de soporte: *Es la adherencia del conjunto de los puntos donde la función no es cero.*

Hemos dicho antes que una función puede anularse en un conjunto de puntos de su soporte cuya medida no sea nula. La función de Dirichlet es cero en todo x irracional, y vale 1 para todo x racional. Su soporte es la recta real, pues fuera de cualquier cerrado contenido en $\mathbb{R}$, acotado o no, hay puntos donde la función no es nula. Pero cada x irracional es un punto de adherencia del conjunto de los puntos donde la función no se anula, porque en todo entorno de un x irracional hay puntos donde la función vale la unidad. Y la medida del conjunto de los x irracionales no es cero.

La recta real es soporte de cualquier función que sea siempre positiva en $\mathbb{R}$, o siempre negativa. Una función f que sea cero en todo $x \in \mathbb{R}$, excepto en un punto $x = x_0$ donde $f(x_0) \neq 0$, tiene como soporte el punto x_0. El soporte de $sen\alpha$ es la recta real.

He aquí dos ejemplos más, uno con soporte compacto y otro con soporte no acotado:

1°) La función $f(x) = |x+2|/2 - |x| + |x-2|/2$ es nula para todo $x \leqslant -2$ y para todo $x \geqslant 2$, y no lo es en el abierto $(-2, 2)$. Por lo tanto, su soporte será el compacto $[-2, 2]$, pues en el exterior de cualquier otro cerrado $[a, b] \subset [-2, 2]$ hay puntos donde la función no es nula. Se trata de un poligonal rectilínea cuyos lados extremos son las semirrectas $x \leqslant -2$, $x \geqslant 2$. Los otros dos lados son los segmentos de extremos $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(0, 2)$, $(2, 0)$ respectivamente.

2°) La función

$$g(x) = -\frac{1}{2}\frac{|x-1|}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{|x-2|}{x-2} + 1$$

no está definida en $x = 1$ y $x = 2$; es cero cuando $1 < x < 2$, y no lo es en $(-\infty, 1)$ y $(2, \infty)$, donde vale constantemente 1. Por lo tanto, el menor cerrado fuera del cual es $g(x) = 0$ será $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. En el exterior de cualquier otro cerrado contenido en el anterior, por ejemplo $(-\infty, 5/6] \cup [13/6, \infty)$, la función no es siempre nula. Aquí el soporte no es acotado. La función $g(x)$ es una escalonada con saltos en $x = 1$ y $x = 2$.

1.3. Funcionales

Consideremos un conjunto F de funciones que tenga estructura de espacio vectorial real. Si hay un operador T que actúa sobre este conjunto dando números reales; es decir, si T es una aplicación de F en $\mathbb{R}$, a T se le llama *funcional.*

En realidad, no es necesario que F sea, precisamente, un espacio de funciones; basta con que sea, simplemente, un espacio vectorial. Diremos entonces: *Un funcional T es una aplicación de un espacio vectorial en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.* Esta es una definición general, y en ella están incluidas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Para nosotros, sin embargo, es especialmente importante que F sea un conjunto de

funciones con estructura de espacio vectorial real, y sobre esta base consideraremos en adelante los funcionales T.

Recordemos el conjunto de las funciones $f \in C\Big([0,1]\Big)$ del apartado 1.1, que es un espacio vectorial. Como ejemplo, definamos en $C\Big([0,1]\Big)$ los dos funcionales siguientes:

$$T_1(f) = \int_0^1 f(x)\,dx; \qquad T_2(f) = \frac{f(1) + 2f(0)}{5}$$

Tanto T_1 como T_2 son operadores que actúan en $C\Big([0,1]\Big)$ y dan números reales. Si, por ejemplo, elegimos la función $f(x) = x^2$, tendremos:

$$T_1(x^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}; \qquad T_2(x^2) = \frac{1^2 + 2.0^2}{5} = \frac{1}{5}$$

Decimos que un funcional $T : F \to \mathbb{R}$ es lineal si

$$T(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 T(f_1) + \alpha_2 T(f_2), \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \quad y \quad \forall f_1, f_2 \in F$$

En el ejemplo anterior, T_1 y T_2 son claramente funcionales lineales; el primero por las propiedades lineales de la integral. En el segundo, tenemos:

$$T_2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \frac{1}{5}\Big((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(1) + 2(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(0)\Big) =$$

$$= \frac{1}{5}\Big(\alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) + \alpha_1 2 f_1(0) + \alpha_2 2 f_2(0)\Big) =$$

$$= \alpha_1 \frac{f_1(1) + 2f_1(0)}{5} + \alpha_2 \frac{f_2(1) + 2f_2(0)}{5} = \alpha_1 T_2(f_1) + \alpha_2 T_2(f_2)$$

Una norma es también, ella misma, un funcional, puesto que es una aplicación de un espacio vectorial en $\mathbb{R}^+$; pero no tiene las propiedades lineales.

Sea F un espacio vectorial real de funciones f. Si establecemos una norma $\|f\|$ en F y otra en $\mathbb{R}$ (que puede ser $\|x\| = |x|$, $x \in \mathbb{R}$), podemos definir en F y R las distancias $\|f_1 - f_2\|$ y $|x_1 - x_2|$ respectivamente, como ya dijimos en el apartado 1.1. Ocurre entonces que las topologías métricas de F y $\mathbb{R}$ nos permiten conocer el comportamiento de un operador $T : F \to \mathbb{R}$ respecto de la proximidad de los elementos en ambos espacios. O sea, saber si a distancias pequeñas en F les corresponde distancias también pequeñas en $\mathbb{R}$. Dicho de otro modo: las topologías de F y $\mathbb{R}$ pueden permitirnos definir la *continuidad* de un funcional $T : F \to \mathbb{R}$. Nosotros vamos a elegir la definición siguiente: *Un funcional "lineal" $T : F \to \mathbb{R}$ es continuo si*

$$\exists M > 0 / |T(f)| \leqslant M\|f\|, \quad \forall f \in F.$$

Los dos funcionales T_1 y T_2 del ejemplo anterior son continuos. Para T_1 se verifica:

$$|T_1(f)| = \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 \left(\max_{[0,1]} f(x) \right) dx = \int_0^1 \|f\|\,dx = \|f\|,$$

y la condición de continuidad se satisface con $M = 1$. Para T_2 tenemos:

$$|T_2(f)| = \left| \frac{f(1) + 2f(0)}{5} \right| \leqslant \frac{|f(1)| + 2|f(0)|}{5} \leqslant \frac{\max_{[0,1]} f(x) + 2 \max_{[0,1]} f(x)}{5} =$$

$$= \frac{\|f\| + 2\|f\|}{5} = \frac{3}{5}\|f\|,$$

donde $M = 3/5$.

La igualdad y la suma de funcionales quedan determinadas con las siguientes definiciones:

Dos funcionales T_p y T_q sobre el espacio vectorial F de funciones f son iguales si

$$T_p(f) = T_q(f), \quad \forall f \in F.$$

La suma de dos funcionales T_p y T_q significa que

$$(T_p + T_q)(f) = T_p(f) + T_q(f), \quad \forall f \in F.$$

El producto de un escalar α por un funcional T sobre F es tal que

$$(\alpha T)(f) = \alpha T(f).$$

1.4. Distribuciones

Consideremos el conjunto de todas las funciones reales φ de una variable real, indefinidamente derivables, que tengan soporte compacto, de manera que todos estos soportes estén contenidos en un compacto fijo K. Para referirnos a este conjunto de funciones φ emplearemos la notación $D(K)$. Evidentemente, $D(K)$ tiene estructura de espacio vectorial real. Pues bien: *Llamamos "distribución" a todo funcional T lineal y continuo sobre el espacio $D(K)$.*

Puesto que las funciones $\varphi \in D(K)$ tienen soporte compacto y son continuas, por ser derivables, serán acotadas, y existe el supremo de $|\varphi(x)|$, que será accesible. Podemos, pues, definir en $D(K)$ la siguiente norma:

$$\|\varphi\| = \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|,$$

que utilizaremos a partir de ahora.

La igualdad y la suma de distribuciones están ya definidas por la igualdad y la suma de funcionales.

Una distribución importante y muy conocida por físicos y matemáticos es la llamada *delta de Dirac*, que hace corresponder a cada función $\varphi \in D(K)$ el valor $\varphi(0)$, siempre existente. Provisionalmente escribiremos: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. La δ es sin duda una distribución, porque:

1°) Es un funcional, obviamente.

2°) Es lineal, puesto que

$$\delta(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)(0) = (\alpha_1\varphi_1)(0) + (\alpha_2\varphi_2)(0) =$$

$$= \alpha_1\varphi_1(0) + \alpha_2\varphi_2(0) = \alpha_1\delta(\varphi_1) + \alpha_2\delta(\varphi_2).$$

3°) Es continuo, porque

$$|\delta(\varphi)| = |\varphi(0)| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| = \|\varphi\|,$$

donde $M = 1$.

Esta distribución fue introducida por Dirac en la Mecánica cuántica como si se tratara de una función, y adquiere allí una importancia considerable. Pero las propiedades de "δ *como función*" $\delta(x)$ no son coherentes, pues $\delta(x)$ es cero en todo $x \in \mathbb{R}$, excepto en $x = 0$, donde $\delta(0) = \infty$, y además $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 1$.

Si hacemos corresponder a cada función $\varphi \in D(K)$ su valor en un punto $x = a \neq 0$, tendremos también la distribución de Dirac, que llamaremos *delta desplazada*, y la representaremos con el símbolo δ_a; es decir, $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.

La notación $T(f)$ que venimos empleando para expresar la aplicación o actuación de un funcional T en un espacio vectorial de funciones comprende a cualquier funcional, sea o no distribución. Para distinguir las distribuciones de los demás funcionales, adoptaremos en adelante esta otra notación: $\langle T, \varphi\rangle$, que nos indicará *siempre* que T es una distribución. Así, pues, cuando se trate de las deltas de Dirac, escribiremos: $\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$; o bien $\langle\delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a)$.

Los funcionales T_1 y T_2 puestos como ejemplo en el apartado 1.1 son lineales y continuos, y actúan sobre el espacio de las funciones f continuas en $[0, 1]$; pero si les hacemos actuar sobre el espacio $D(K)$ de las funciones φ, les habremos convertido en distribuciones. Podemos observar que T_2 es entonces

$$T_2 = \frac{1}{5}(\delta_1 + 2\delta)(\varphi) = \frac{1}{5}\Big(\delta_1(\varphi) + 2\delta(\varphi)\Big) = \frac{1}{5}\Big(\varphi(1) + 2\varphi(0)\Big), \quad \forall\varphi \in D(K).$$

Con la notación $\langle T, \varphi\rangle$, toda igualdad $\langle T_p, \varphi\rangle = \langle T_q, \varphi\rangle$ implica $T_p = T_q$; y la suma $\langle T_1, \varphi\rangle + \langle T_2, \varphi\rangle + \ldots + \langle T_n, \varphi\rangle$ se expresa como $\langle T_1 + T_2 + \ldots + T_n, \varphi\rangle$.

Vamos a examinar ahora una cuestión importante. ¿Puede una función, de algún modo, definir una distribución? La respuesta es afirmativa para cierto tipo de funciones.

Si h es una función localmente integrable, es decir, si existe

$$\int_S |h(x)|\,dx$$

para todo compacto S de la recta real, podemos definir un funcional T_h de la siguiente manera:

$$T_h(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in D(K),$$

donde, como ya hemos dicho, K es un compacto que contiene a todos los soportes de las φ. Veamos si T_h es una distribución. Desde luego, la integral es finita, puesto que φ se anula fuera de un compacto de $\mathbb{R}$, y h es integrable sobre compactos. La linealidad es obvia por tratarse de una integral. En cuanto a la continuidad, tenemos:

$$|T_h(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,dx \right| = (\textit{por ser nula fuera de } K) = \left| \int_K h(x)\varphi(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_K |h(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_K |h(x)|\,\|\varphi\|\,dx = \|\varphi\| \int_K |h(x)|\,dx, \quad \forall \varphi \in D(K)$$

Vemos que se satisface la definición de continuidad de un funcional con

$$M = \int_K |h(x)|\,dx.$$

Entonces, puesto que T_h es una distribución, debemos emplear la notación convenida, y escribiremos:

$$\langle T_h, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in D(K)$$

Por lo tanto, *toda función h localmente integrable define una distribución dada por el operador*

$$T_h = \int_{\mathbb{R}} h(x)(\,)\,dx.$$

Son distribuciones integrales con núcleo h, y pueden ser consideradas como "funciones generalizadas". Todas las distribuciones lo son.

1.5. Derivadas sucesivas de una distribución

Las funciones continuas son un caso particular de las localmente integrables y definen, pues, distribuciones. Sea $h(x)$ una función continua que tiene derivada primera también continua (clase 1). Entonces, $h'(x)$ define la distribución

$$\langle T_{h'}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h'(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in D(K)$$

Integremos por partes:

$$\langle T_{h'}, \varphi \rangle = h(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)\,dx$$

Como $\varphi(x)$ se anula fuera de un compacto, la parte integrada es cero; por lo tanto:

$$\langle T_{h'}, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} h(x)\varphi'(x)\,dx$$

Pero la integral del segundo miembro es la distribución

$$T_h = \int_{\mathbb{R}} h(x)(\,)\,dx$$

actuando sobre las funciones φ', pertenecientes también a $D(K)$ por ser, como las φ, indefinidamente derivables y con soporte compacto contenido en K. Así, pues:

$$\langle T_{h'}, \varphi \rangle = -\langle T_h, \varphi' \rangle.$$

Esta igualdad sirve de base para dar una definición de derivada de una distribución cualquiera T: *Llamamos derivada de una distribución T a un funcional T' tal que*

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in D(K). \tag{1.5a}$$

Pero como el operador T' es lineal y continuo sobre $D(K)$, será también una distribución.

Partiendo de la aplicación $\langle T', \varphi \rangle$, podemos definir igualmente la derivada de T', o sea, la derivada segunda de T. Tendremos:

$$\langle T'', \varphi \rangle = -\langle T', \varphi' \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle.$$

En general, la derivada enésima de T será

$$\langle T^{(n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n} \rangle, \quad \forall \varphi \in D(K).$$

Toda distribución es, pues, indefinidamente derivable, por serlo las φ.

Por ejemplo, las derivadas sucesivas de las deltas de Dirac son tales que:

$$\langle \delta', \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi' \rangle = -\varphi'(0); \quad \langle \delta'', \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi'' \rangle = \varphi''(0); \ldots$$

$$\ldots; \quad \langle \delta^{(n}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta, \varphi^{(n} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n}(0)$$

Y análogamente si se trata de deltas desplazadas. Vemos aquí que estas derivadas son también deltas de Dirac que van actuando sobre las derivadas sucesivas de las funciones φ; las imágenes están precedidas por el signo $(-)$ o $(+)$, según sea impar o par, respectivamente, el orden de la derivada.

Nuestro propósito, anunciado al final del apartado 0.3 de la introducción, es lograr una expresión de la derivada de $|u(x)|$, con el fin de obtener la de una poligonal, dada por una sola ecuación con símbolos de valor absoluto. Esto es lo que vamos a hacer a continuación.

1.6. Derivadas sucesivas de $|u(x)|$ en el sentido de las distribuciones

Derivada primera

Sea $u(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$, con derivada primera continua. Suponemos también que u tiene n ceros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en los cuales cambia de signo sin inflexión sobre el eje x, y que es positiva en $(-\infty, x_1)$; entonces será alternativamente negariva y positiva en los intervalos siguientes.

Como consecuencia de todo esto, la función $|u(x)|$ será continua en $\mathbb{R}$ (y en cada cero $x_1, \ldots, x_n$ de u tendrá un punto anguloso sin tangente única). Por lo tanto, $|u|$ es localmente integrable, y define la distribución $T_{|u|}$ sobre $D(K)$ tal que

$$\langle T_{|u|}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |u| \varphi \, dx.$$

Trataremos de hallar $|u|'$ en el sentido de las distribuciones. Para ello, empezaremos obteniendo la derivada primera de la distribución $T_{|u|}$, que llamaremos $T'_{|u|}$. En virtud de la definición dada por la igualdad (1.5a), será:

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = -\langle T_{|u|}, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} |u| \varphi' \, dx$$

Podemos suprimir las barras que hay bajo el signo integral recordando que u es alternativamente positiva y negativa en $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots$. O sea:

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = -\langle T_{|u|}, \varphi' \rangle = -\left(\int_{-\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{\infty} \right) u \varphi' \, dx.$$

Integremos por partes cada uno de los términos, y tendremos:

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = -\left(u\varphi \Big|_{-\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} u' \varphi \, dx - u\varphi \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} u' \varphi \, dx + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n u\varphi \Big|_{x_n}^{\infty} + (-1)^{n+1} \int_{x_n}^{\infty} u' \varphi \, dx \right).$$

Todas las partes integradas son nulas, pues φ se anula fuera de un compacto y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son ceros de u. Queda:

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = \left(\int_{-\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{\infty} \right) u' \varphi \, dx.$$

El segundo miembro lo podemos expresar con una sola integral, introduciendo la función $|u|/u$, que vale alternativamente $+1$ y -1 en $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), etc., y podemos escribir:

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{|u|}{u} u' \varphi \, dx.$$

El producto $v = |u|u'/u$ tiene discontinuidades sólo donde las tiene $|u|/u$, y son de oscilación finita (recuérdese que u' es continua). Luego $v = |u|u'/u$ es localmente integrable, y definirá una distribución T_v tal que

$$\langle T'_{|u|}, \varphi \rangle = \langle T_v, \varphi \rangle,$$

lo cual implica

$$T'_{|u|} = T_v.$$

Tenemos, pues, la derivada primera de la distribución $T_{|u|}$, que es T_v. Entonces, podemos apoyarnos en este resultado para decir que la derivada primera de $|u|$ en el sentido de las distribuciones es v. Es una conclusión razonable establecer:

$$|u|' = \frac{|u|}{u} u'.$$

Hemos llegado así a la expresión de la derivada primera de $|u|$ según las distribuciones. Por lo tanto, la derivada de la poligonal rectilínea dada por la ecuación (0.3a) del apartado 0.3 de la introducción será:

$$y' = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{|x - x_i|}{x - x_i} + b,$$

que es, evidentemente, una escalonada no definida en los x_i, donde hay salto.

Otro ejemplo: la derivada de $|\cos x|$ es $|\cos x|(-\operatorname{sen} x)/\cos x$, que podemos poner en la forma $|\cos x|' = -|\cos x| \operatorname{tg} x$. Su gráfica es la de la figura 1.b.

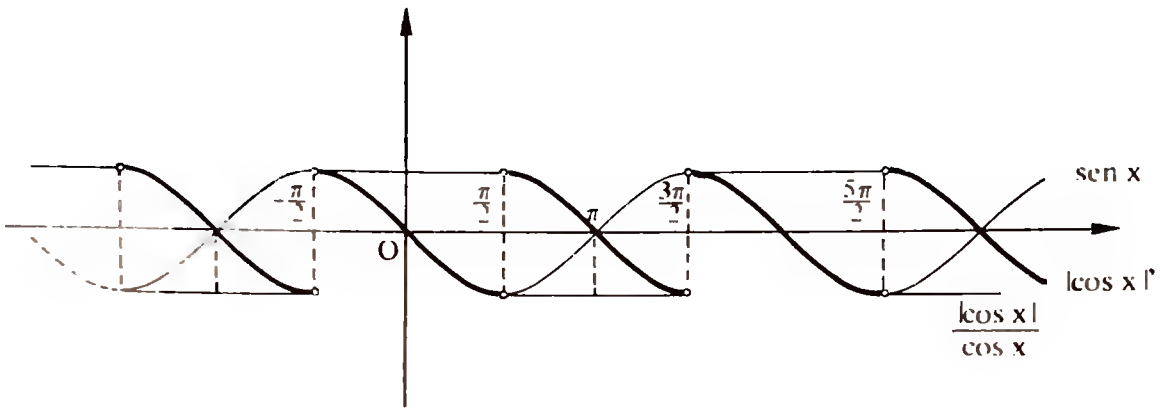


Figura 1.b

Derivada segunda

Suponemos que u es de clase 2 en $\mathbb{R}$, con los mismos ceros de antes e iguales características en ellos. Empecemos hallando la derivada segunda de la distribución $T_{|u|}$, que en virtud de la fórmula (1.5a) y de que $T'_{|u|} = T_v$, será:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = -\langle T'_{|u|}, \varphi' \rangle = -\langle T_v, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{u} u' \varphi' \, dx.$$

Podemos prescindir del factor $|u|/u$ en la integral, teniendo en cuenta que es alternativamente $+1$ y -1 en

$$(-\infty, x_1), \ (x_1, x_2), \ldots.$$

Tendremos:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = -\left(\int_{-\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{\infty} \right) u' \varphi' \, dx.$$

Integremos por partes cada término:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = -\left(u' \varphi \Big|_{-\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} u'' \varphi \, dx - u' \varphi \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} u'' \varphi \, dx + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^n u' \varphi \Big|_{x_n}^{\infty} + (-1)^{(n+1)} \int_{x_n}^{\infty} u'' \varphi \, dx \right) =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + \ldots + (-1)^n \int_{x_n}^{\infty} \right) u''\varphi\, dx - 2\Big(u'(x_1)\varphi(x_1) - u'(x_2)\varphi(x_2) + \cdots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1} u'(x_n)\varphi(x_n)\Big).$$

Los términos integrales los podemos reducir a uno solo introduciendo $|u|/u$, que vale alternativamente $+1$ y -1 en $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots$ Resulta:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{|u|}{u} u''\varphi\, dx - 2\Big(u'(x_1)\varphi(x_1) - \ldots + (-1)^{n+1} u'(x_n)\varphi(x_n)\Big).$$

Como u es de clase 2, será u'' continua. El producto $w = |u|u''/u$ tendrá saltos donde los tenga $|u|/u$, de oscilación finita, y será, pues, localmente integrable. Así que

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|u|}{u} u''\varphi\, dx$$

es la distribución $\langle T_w, \varphi \rangle$. Los valores

$$\varphi(x_1),\ \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$$

que aparecen en los otros términos son deltas de Dirac sobre $D(K)$, desplazadas; es decir,

$$\varphi(x_i) = \langle \delta_{x_i}, \varphi \rangle.$$

Por lo tanto:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = \langle T_w, \varphi \rangle - \langle 2u'(x_1)\delta_{x_1}, \varphi \rangle + \langle 2u'(x_2)\delta_{x_2}, \varphi \rangle - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n \langle 2u'(x_n)\delta_{x_n}, \varphi \rangle.$$

Recordando la suma de funcionales y, por tanto, de distribuciones, tendremos:

$$\langle T''_{|u|}, \varphi \rangle = \langle T_w + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u'(x_i)\delta_{x_i}, \varphi \rangle,$$

lo cual implica

$$T''_{|u|} = T_w + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i u'(x_i)\delta_{x_i},$$

que nos da la derivada segunda de la distribución $T_{|u|}$.

Si en esta igualdad descendemos de las distribuciones a las funciones, vemos que ya tenemos preparadas $|u|$ y $w = |u|u''/u$; pero bajo el sumatorio tendríamos que reducir las distribuciones δ_{x_i} a la condición de funciones. Así, pues, en el sentido de las distribuciones, la derivada segunda de $|u|$ sólo difiere de $|u|u''/u$ en el término

$$2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u'(x_i)\delta_{x_i}(x).$$

* * *

Si $u(x)$ es sucesivamente derivable, las derivadas tercera y siguientes de $|u|$ se obtienen de modo semejante al expuesto. Por ejemplo, para hallar $|u|'''$ partiremos de

$$\langle T'''_{|u|}, \varphi\rangle = -\langle T''_{|u|}, \varphi'\rangle.$$

Pero antes hemos encontrado

$$\langle T''_{|u|}, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{u} u''\varphi\, dx + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u'(x_i)\,\varphi(x_i),$$

donde habrá que sustituir φ por φ', obteniéndose:

$$\langle T'''_{|u|}, \varphi\rangle = -\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{u} u''\varphi'\, dx + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u'(x_i)\varphi'(x_i)\right).$$

Manipularemos la integral del segundo miembro de la misma manera que lo hicimos antes, incluida la integración por partes; y en cuanto al sumatorio, recordaremos que

$$\varphi'(x_i) = \langle \delta_{x_i}, \varphi'\rangle = -\langle \delta'_{x_i}, \varphi\rangle.$$

Se llega así a una expresión de $T'''_{|u|}$ como suma de operadores sobre $D(K)$. Y pasando de las distribuciones a las funciones, podemos definir $|u|'''$ como

$$|u|''' = \frac{|u|}{u}u''' + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u'(x_i)\delta'_{x_i}(x) + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}u''(x_i)\delta_{x_i}(x)$$

Las derivadas sucesivas de $|u|$ en el sentido de las distribuciones tienen, pues, un término $|u|u^{(m}/u$, que llamaremos "término principal", al cual se le suman otros que contienen deltas de Dirac y sus derivadas, si el orden m de derivación es superior al primero. Las deltas aparecen cuando se deriva una función con saltos de oscilación finita.

Estas expresiones obtenidas para las derivadas de $|u|$ hacen que sean muy significativos los resultados hallados al desarrollar otro método de cálculo, práctico y breve, para la derivación o integración de funciones tomadas en valor absoluto, o que contienen argumentos tomados en valor absoluto, como veremos enseguida. A tales

funciones les llamaremos en adelante "funciones valoradas" (así las denominó el profesor Barinaga).

Conviene antes encontrar la derivada de $|u|/u$, donde u es la misma función que hemos venido considerando hasta aquí, con ceros en $x_1, \ldots, x_n$ donde cambia de signo, etc. Designaremos por s a $|u|/u$. Evidentemente, s es localmente integrable, y en los puntos x_i tiene saltos de oscilación ± 2. Define, pues, una distribución.

En este mismo apartado 1.6b obtuvimos la derivada segunda de $|u|$ según las distribuciones; o sea, la derivada primera de $v = |u|u'/u = su'$, que es:

$$v' = \frac{|u|}{u}u'' + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i u'(x_i)\delta_{x_i}(x).$$

Si en el producto $v = |u|u'/u$ fuera $u' = 1$ en $\mathbb{R}$, la expresión anterior nos daría la derivada de $s = |u|/u$, que será:

$$s' = 0 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^n \delta_{x_i}(x). \qquad (1.6a)$$

A esto mismo hemos podido llegar calculando la derivada de la distribución T_s. Ya vemos que s' es la suma de los productos de las oscilaciones de s en los puntos x_i por las deltas de Dirac en esos puntos; y el término principal es cero.

2. CALCULO DIRECTO DE DERIVADAS E INTEGRALES DE LAS FUNCIONES VALORADAS

2.1. La función $\frac{|u|}{u}$

Reconsideremos la función $u(x)$, continua y no idénticamente nula en $\mathbb{R}$, y supongamos que tiene un número discreto de ceros reales, finito o infinito, en parte de los cuales, o en todos ellos, u cambia de signo. Formulemos ahora la función $s = |u|/u$, que es $+1$ cuando $u > 0$ y -1 si $u < 0$. *No está definida en los ceros de u*, y esto la distingue de la función "signo de u". La derivada de s existe y es cero en todo $x \in \mathbb{R}$ que no anule a u. En los ceros de u no hay derivada; pero ella existe en todo entorno reducido de cada uno de esos ceros y, por lo tanto, la derivada de s tiene límites laterales en todos ellos, y son nulos. Podemos convenir en que esa derivada sea también cero en los puntos donde se anula u, con lo cual $s' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Veamos las consecuencias de aceptar este convenio:

1°) La propiedad de ser continua toda función derivable deja aquí de ser cierta, pues s tiene discontinuidades finitas inevitables en $\mathbb{R}$ y, sin embargo, resulta ser derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, s provista de derivada nula en todos los puntos de $\mathbb{R}$, incluidos los ceros de u, si los hay, no se comporta como una función.

2°) La derivada (cero) de s no coincide con s' en el sentido de las distribuciones, dada por la expresión (1.6a).

3°) La pseudofunción s se comporta como una constante desde el punto de vista del cálculo diferencial de la teoría de las funciones reales. Ello implica que si una verdadera función $v(x)$ es derivable en un intervalo cualquiera, la derivada del producto $s\,v$ en dicho intervalo es:

$$(s\,v)' = s\,v' = \frac{|u|}{u}v'.$$

Si escogemos $v(x) = u(x)$, y suponemos que u es derivable en $(-\infty\,, \infty)$, tendremos:

$$(s\,u)' = |u|' = s\,u' = \frac{|u|}{u}u'.$$

Hemos llegado así a la derivada primera de $|u|$, *que coincide con la obtenida en el sentido de las distribuciones* (apartado 1.6).

Esta coincidencia ya no se da en la derivada segunda de $|u|$ ni en las siguientes, si u es sucesivamente derivable y cambia de signo en algunos o todos sus ceros, porque el factor $|u|/u$ de la derivada primera introduce saltos en dicha derivada y, por lo tanto, habrá deltas de Dirac en $|u|''$ y siguientes. Pero lo que sí está claro es que las derivadas sucesivas de $|u|$, aceptando el convenio, son $|u|u^{(m}/u$, donde m es el orden de la derivada. Y estas expresiones $s\,u^{(m}$ son los términos principales de las correspondientes derivadas de $|u|$ en el sentido de las distribuciones. El convenio hace que sea $s' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, que es también el término principal de la derivada de s según las distribuciones, dada en la fórmula (1.6a).

Admitiendo el convenio antes indicado, poseemos un método de cálculo rápido para obtener las derivadas e integrales de $|u|$ y de otras funciones valoradas, como por ejemplo $|x|\cos x$, $e^{x|x|}$, etc. Y si queremos los resultados en el sentido de las distribuciones, sumaremos a estas derivadas los términos en las deltas obtenidos anteriormente.

Este método fue publicado en 1942 (véase las notas bibliográficas al final de este capítulo) y es, pues, anterior a la formulación general de la teoría de las distribuciones. También hemos comprobado la utilidad de introducir en el cálculo de derivadas distribucionales la función $|u|/u$, que proporciona una síntesis de cada resultado y ahorra explicaciones posteriores.

Ahora bien, la discrepancia entre un método y otro en la derivación sucesiva de $|u|$, a partir de la primera derivada, tiene como base lo siguiente: desde el punto de vista de la teoría de funciones, la derivada expresa la rapidez con la que varía una función en cada punto de su campo de existencia. En cada intervalo (x_k, x_{k+1}) entre dos ceros consecutivos de $u(x)$, la fracción $s = |u|/u$ es constante y, por lo tanto no hay variación. La derivada es cero. ¿Pero qué ocurre en un punto x_k donde s da un salto de oscilación finita? ¿Qué sentido tiene aquí la derivada de s, si es que tiene alguno? Puede optarse por convenir en que sea cero, puesto que en todo entorno excluyente

de x_k dicha derivada es cero. Pero también puede optarse por aplicar en x_k el criterio de la rapidez con que varía s. Es evidente que esta rapidez en x_k no puede ser expresada por medio de un número, porque no puede ser medida. En una discontinuidad cualquiera, pero con límites laterales finitos, la tasa de variación de la función que se considere no es finita. Por eso aparecen las deltas de Dirac.

2.2. Derivadas sucesivas de algunas funciones elementales valoradas

Seguimos suponiendo que $u(x)$ es sucesivamente derivable en $\mathbb{R}$ (sobre cualquier intervalo acotado, se entiende) y que tiene un número finito o infinito de ceros aislados donde cambia de signo. Trabajaremos aceptando el convenio del apartado anterior.

Es claro que toda función de la forma $u(|x|)$ es par, lo mismo que $|u(|x|)|$. Pero si $u(x)$ es par, o si es impar, se ve fácilmente que $|u(|x|)| = |u(x)|$. Por ejemplo,

$$|\cos|x|| = |\cos x|; \quad |\operatorname{sen}|x|| = |\operatorname{sen} x|.$$

Las derivadas sucesivas de la potencial $|x|^r$, $r \in \mathbb{R}$, son:

$$D|x|^r = r|x|^{r-1}D|x| = r|x|^{r-1}\frac{|x|}{x} = r\,x^{-1}|x|^r;$$

$$D^2|x|^r = r\frac{|x|}{x}D|x|^{r-1} = r(r-1)x^{-2}|x|^r;$$

.....

$$D^n|x|^r = r(r-1)\dots(r-n+1)x^{-n}|x|^r.$$

Si en esta última igualdad suprimimos las barras en ambos miembros, la igualdad persiste, porque nos queda la derivada enésima de x^r. Si r es un número natural m, las derivadas a partir de la emésima son nulas.

Las derivadas de la exponencial $e^{|x|}$ son:

$$D\,e^{|x|} = e^{|x|}D|x| = \frac{|x|}{x}e^{|x|}; \quad D^2e^{|x|} = \frac{|x|}{x}D\,e^{|x|} = e^{|x|}; \dots$$

Vemos que las de orden par coinciden con la función. Las de orden impar rompen la curva $e^{|x|}$ en $x = 0$ con un salto de oscilación 2, y sustituyen la rama izquierda por su simétrica respecto de x. Suprimiendo las barras en ambos miembros de las derivadas tenemos siempre $D\,e^x = e^x$.

Los logaritmos valorados son $|\ln x|$, $\ln|x|$ y $|\ln|x||$. Como la derivada enésima de $\ln x$ es $(-1)^{n+1}(n-1)!/x^n$, tendremos:

$$D^n|\ln x| = (-1)^{n+1}\frac{|\ln x|}{\ln x}\frac{(n-1)!}{x^n},$$

definida sólo para $x > 0$, excepto en $x = 1$. La derivada primera de $\ln|x|$ es

$$D\left(\ln|x|\right) = \frac{|x|'}{|x|} = \frac{1}{x}.$$

Las derivadas sucesivas son las mismas de $\ln x$, pero con $x \in \mathbb{R}$. De modo semejante se obtiene la derivada enésima de $|\ln|x||$. Suprimiendo barras en ambos miembros de todas estas expresiones, persisten las igualdades.

Para la derivación de $|\cos x|$, sin modificar el argumento x, como suele hacerse, debemos tener en cuenta que

$$D^{2n}(\cos x) = (-1)^n \cos x \quad y \quad D^{2n+1}(\cos x) = (-1)^{n+1}\operatorname{sen} x.$$

Entonces,

$$D^{2n}|\cos x| = (-1)^n\frac{|\cos x|}{\cos x}\cos x = (-1)^n|\cos x|;$$

$$D^{2n+1}|\cos x| = (-1)^{n+1}\frac{|\cos x|}{\cos x}\operatorname{sen} x = (-1)^{n+1}|\cos x|\operatorname{tg} x.$$

Análogamente se obtiene las derivadas pares e impares de $|\operatorname{sen} x|$, que son:

$$D^{2n}|senx| = (-1)^n\frac{|\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x = (-1)^n|\operatorname{sen} x|;$$

$$D^{2n+1}|\operatorname{sen} x| = (-1)^n\frac{|\operatorname{sen} x|}{\operatorname{sen} x}\cos x = (-1)^n|\operatorname{sen} x|\operatorname{ctg} x.$$

En el caso del coseno, como $\cos x$ es par, resulta $\cos|x| = \cos x$; pero $\operatorname{sen}|x| \neq \operatorname{sen} x$, y habrá que tener en cuenta la valorada $\operatorname{sen}|x|$. Las derivadas sucesivas de ésta son:

$$D\left(\operatorname{sen}|x|\right) = \cos|x|D|x| = \frac{|x|}{x}\cos|x|; \quad D^2\left(\operatorname{sen}|x|\right) = \frac{|x|}{x}D\left(\cos|x|\right) = -\operatorname{sen}|x|; \ldots$$

Vemos que las derivadas impares de $\operatorname{sen}|x|$ son de la forma $\pm\,|x|\cos|x|/x$, con un salto en $x = 0$. Las pares son $\mp\operatorname{sen}|x|$ (si en la expresión $|x|D(\cos|x|)/x$ hubiéramos derivado $\cos|x|$ como a su igual $\cos x$, habría quedado un salto ficticio en $x = 0$).

2.3. Integrales de funciones valoradas

Integral indefinida

Sea $u(x)$ continua en $\mathbb{R}$. La gráfica de $|u(x)|$ coincide con la de $u(x)$ cuando es $u \geqslant 0$. Si $u < 0$, la curva u, o los trozos de ella donde esto se verifica, quedan sustituidos en $|u|$ por sus simétricos respecto del eje x. Las áreas comprendidas entre $|u|$ y el eje x para cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$ son las mismas que las comprendidas entre u y dicho eje, pero haciéndose positivas las áreas que en este último caso son negativas. Por lo tanto, si a la integral $\int u\,dx$ la multiplicamos por un factor que valga 1 cuando es $u > 0$ y -1 si es $u < 0$, tendremos la integral de $|u|$. Pero este factor es, precisamente, $|u|/u$. Así, pues:

$$\int |u|\,dx = \frac{|u|}{u} \int u\,dx.$$

Si U es una primitiva de u, será:

$$\int |u|\,dx = \frac{|u|}{u}\big(U + C\big).$$

Por ejemplo:

$$\int |x|\,dx = \frac{|x|}{x} \int x\,dx = \frac{1}{2}x|x| + C\frac{|x|}{x},$$

con un salto en $x = 0$ de oscilación $2C$.

Aquí se plantea una cuestión interesante: si aceptamos el convenio del apartado 2.1, nada nos impide sumar una pseudofunción $|v|/v$ (si v es continua y unívoca en $\mathbb{R}$), en vez de una constante, en las integrales indefinidas; o sumar términos de la forma $C|v|/v$, con C constante. En el ejemplo anterior podíamos haber elegido el sumando de integración $C|x|/x$, con lo cual sería:

$$\int |x|\,dx = \frac{1}{2}x|x| + C,$$

siendo, pues, la integral una función continua. Como, según el convenio, $|u|/u$ se comporta como una constante, puede entrar y salir del signo integral.

Otros ejemplos:

a) Puesto que $(e^{|x|})' = \frac{|x|}{x}e^{|x|}$, será:

$$\int \frac{|x|}{x}e^{|x|}\,dx \Leftrightarrow \frac{|x|}{x}\int e^{|x|}\,dx = e^{|x|} + C.$$

Luego

$$\int e^{|x|}\,dx = \frac{x}{|x|}\left(e^{|x|}+C\right) = \frac{|x|}{x}\left(e^{|x|}+C\right),$$

con discontinuidad en $x = 0$.

b)

$$\int |\cos x|\,dx = \frac{|\cos x|}{\cos x}\int \cos x\,dx = \frac{|\cos x|}{\cos x}(\operatorname{sen} x + C),$$

con discontinuidades en los ceros de $\cos x$.

c)

$$\int |x|x^n\,dx = \frac{1}{n+2}|x|x^{n+1} + C\,\frac{|x|}{x}.$$

d) Puesto que

$$\left(\operatorname{Ch}|2x-1|\right)' = 2\,\frac{|2x-1|}{2x-1}\operatorname{Sh}|2x-1|,$$

será:

$$\int \operatorname{Sh}|2x-1|\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{|2x-1|}{2x-1}\left(\operatorname{Ch}|2x-1|+C\right).$$

Integral definida

Escribiremos provisionalmente

$$\int_a^b |u|\,dx = \frac{|u|}{u}\int_a^b u\,dx.$$

Pero si u tiene en $[a,b]$ ceros en los cuales cambia de signo, el factor $|u|/u$ valdrá la unidad en algunos subintervalos entre ceros consecutivos y -1 en otros. Si estos ceros de u en $[a,b]$ son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, descomponemos la integral del segundo miembro en la suma siguiente:

$$\int_a^b |u|\,dx = \frac{|u|}{u}\int_a^{x_1} u\,dx + \frac{|u|}{u}\int_{x_1}^{x_2} u\,dx + \ldots + \frac{|u|}{u}\int_{x_n}^b u\,dx.$$

Ahora, el factor $|u|/u$ de cada integral, o vale 1, o vale -1 en el abierto cuyos extremos son los límites de cada una de esas integrales.

Ejemplos:

A)

$$\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx.$$

La parábola $x^2 - 1$ tiene dos ceros en $x = \mp 1$, contenidos en el intervalo de integración, y en los cuales cambia de signo. El factor $|x^2 - 1|/(x^2 - 1)$ vale 1 en $(-2, -1)$ y $(1, 2)$, y vale -1 en $(-1, 1)$. Por lo tanto:

$$\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx = \left(\int_{-2}^{-1} - \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{2} \right) (x^2 - 1)\, dx = 4.$$

B) La integral

$$I = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} |\cos x|\, dx$$

va a incorporar el factor $|\cos x|/(\cos x)$. En el intervalo de integración hay un único cero de $\cos x$ en $x = 2n\pi + \pi/2$. Ese factor vale 1 si

$$x \in \left(2n\pi,\ 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right),$$

y -1 si

$$x \in \left(2n\pi + \frac{\pi}{2},\ 2n\pi + \pi\right)$$

Por lo tanto:

$$I = \left(\int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \int_{2n\pi + \frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\pi} \right) \cos x\, dx = 2.$$

C)

$$I = \iint_S |\cos(x + y)|\, dx\, dy; \quad S = [0, \pi] \times [0, \pi].$$

Puede resolverse subdividiendo el recinto S en tres mediante dos paralelas a la diagonal que parte del vértice $(0, \pi)$; dichas paralelas pasan por $(\pi/2, 0)$ y $(3\pi/2, 0)$ respectivamente. Después se establece las correspondientes identidades entre $|\cos(x + y)|$ y $\pm \cos(x + y)$ en cada subrecinto. Pero también puede ser resuelta del modo siguiente:

$$I = \iint_S |\cos(x + y)|\, dx\, dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x + y)|\, dy.$$

La integral interior es

$$\frac{|\cos(x + y)|}{\cos(x + y)} \int_0^{\pi} \cos(x + y)\, dy.$$

El $\cos(x + y)$ tiene un cero cuando es $y = \pi/2 - x$. Si $x < \pi/2$, dicho cero es único en el intervalo de integración. Entonces $|\cos(x + y)|/(\cos(x + y))$ vale 1 en $(0, \pi/2 - x)$ y -1 en $(\pi/2 - x, \pi)$. Así, pues, la integral interior es:

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2} - x} - \int_{\frac{\pi}{2} - x}^{\pi} \right) \cos(x + y)\, dy = 2.$$

Por lo tanto, la integral propuesta será

$$I = 2 \int_0^{\pi} dx = 2\pi.$$

D)

$$I = \iint_S |y - \operatorname{sen} x| dx\, dy; \quad S = [0, \pi] \times [0, 1].$$

Tendremos:

$$I = \int_0^{\pi} dx \int_0^1 |y - sen\, x|\, dy.$$

La función $y - \operatorname{sen} x$ tiene un cero en $y = \operatorname{sen} x$. Este cero estará entre los límites de la integral interior, y será único, si

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Entonces, el factor $|y - \operatorname{sen} x|/(y - \operatorname{sen} x)$ que va a multiplicar a dicha integral vale -1 en $(0, \operatorname{sen} x)$ y 1 en $(\operatorname{sen} x, 1)$. O sea:

$$\int_0^1 |y - \operatorname{sen} x|\, dy = \left(- \int_0^{\operatorname{sen} x} + \int_{\operatorname{sen} x}^1 \right) (y - \operatorname{sen} x)\, dy = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}.$$

La integral propuesta será:

$$I = \int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \right) dx = \pi - 2.$$

NOTA: Hemos visto que en el cálculo de derivadas e integrales de las funciones con barras aparecen productos de la forma $|u|v/u$, donde hay que tener en cuenta los ceros de u. Suponemos que u y v son, al menos, continuas en $\mathbb{R}$ y que u tiene ceros aislados x_i donde cambia de signo. Si ninguno de estos ceros de u es cero de v, el producto $s\,v = |u|v/u$ tiene saltos de oscilación finita en los x_i. Pero si algún cero x_k de u lo es también de v será:

$$\lim_{x \to x_k} (s\,v) = \pm \lim_{x \to x_k} v = \pm\, v(x_k) = 0,$$

y podemos atribuir a $s\,v$ este valor cero en x_k; es decir, $s\,v$ puede hacerse continua en x_k.

Si u tiene algún cero en el cual hay máximo o mínimo relativo de u, los límites laterales de $|u|/u$ en ese cero son iguales; la oscilación de $s\,v$ es nula, y podemos extender la continuidad de $s\,v$ a dicho cero.

Resumiendo: si u y v son continuas, $s\,v$ también lo es, a trozos, en general. Pero podemos extender la continuidad a los ceros comunes de u y v, y a los de u donde u no cambia de signo.

Por ejemplo, es

$$I = \int |2ax + b|\, dx = \frac{|2ax + b|}{2ax + b} (ax^2 + bx + c),$$

siendo c la constante de integración. El segundo miembro es de la forma $s\,v$. Si el cero $-b/(2a)$ de $2ax + b$ fuese también cero de $ax^2 + bx + c$, podríamos considerar continuo al segundo miembro. Para ello tendría que ser $c = b^2/(4a)$, y nos quedaría:

$$I = \frac{1}{4a} |2ax + b| (2ax + b).$$

2.4. Escalonadas

Ya nos hemos referido a ellas en apartados anteriores. Una escalonada es una función que toma valores constantes $h_0, h_1, \ldots, h_n$ en los intervalos abiertos $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, \infty)$ respectivamente. En general, una escalonada será ascendente en ciertos trozos del eje x y descendente en otros.

La expresión de una escalonada es de la forma general

$$f(x) = a_1 \frac{|x - x_1|}{x - x_1} + a_2 \frac{|x - x_2|}{x - x_2} + \ldots + a_n \frac{|x - x_n|}{x - x_n} + b, \qquad (2.4a)$$

donde $a_1, \ldots, a_n, b$ son números reales, y los a_i distintos de cero. Los $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las abscisas de los puntos de discontinuidad. En cada uno de los intervalos $(-\infty, x_1)$, $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, \infty)$ la expresión (2.4a) es constante. En $(-\infty, x_1)$, $f(x)$ toma el valor $-a_1 - a_2 - \ldots - a_n + b$; en los siguientes va cambiando el signo de a_1, el de a_2, etc.

Si los valores de $f(x)$ en cada intervalo son respectivamente $h_0, h_1, \ldots, h_n$, un sencillo sistema lineal nos da los coeficientes a_i, b en función de los h, y resulta:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left((h_1 - h_0)\frac{|x - x_1|}{x - x_1} + (h_2 - h_1)\frac{|x - x_2|}{x - x_2} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (h_n - h_{n-1})\frac{|x - x_n|}{x - x_n} + h_0 + h_n\right) \qquad (2.4b)$$

Si nos dan (2.4a), podemos dibujar la gráfica, porque conocemos los puntos de salto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y podemos calcular los valores de $f(x)$ a ambos lados de cada x_i. Si nos dan la gráfica, escribiremos inmediatamente su expresión en la forma (2.4b).

La derivada primera de $f(x)$ en el sentido de las distribuciones es, como sabemos, la suma de los productos de las oscilaciones en los x_i por las deltas de Dirac en dichos puntos. O sea:

$$f'(x) = 0 + (h_1 - h_0)\delta_{x_1} + (h_2 - h_1)\delta_{x_2} + \ldots + (h_n - h_{n-1})\delta_{x_n}.$$

El término principal es cero, que es la derivada de $f(x)$ aceptando el convenio del apartado 2.1.

Ejemplo: la escalonada de ecuación

$$y = -\frac{2}{3}\frac{|x + 2|}{x + 2} + \frac{1}{3}\frac{|x - 2|}{x - 2} + \frac{2}{3}$$

es la de la figura 2.a.

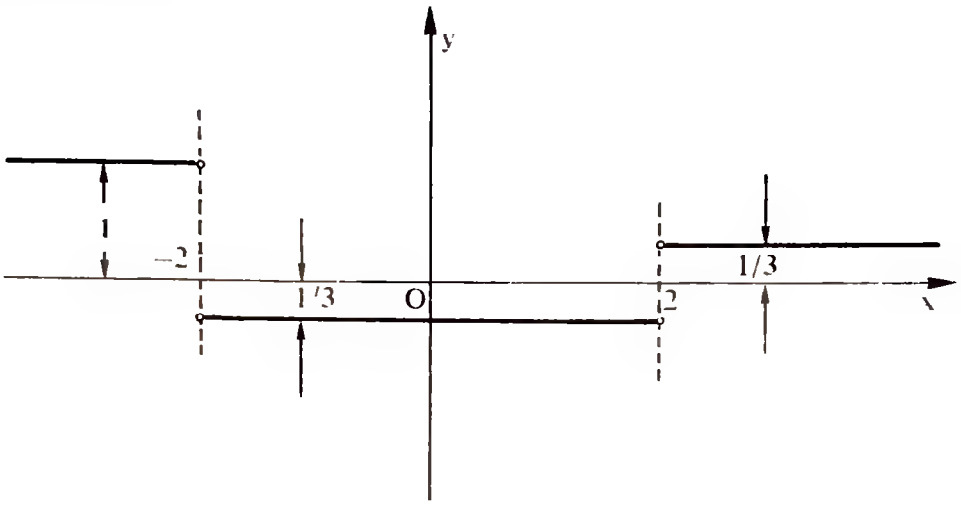


Figura 2.a

Escalonada unidad en (a,b) y escalón unidad de Heaviside

La escalonada unidad en (a,b) es la que vale 1 en (a,b) y cero en el resto de la recta real, excepto en a y b, donde no está definida. Su expresión nos la da la fórmula (2.4b), en la cual

$$x_1 = a, \quad x_2 = x_n = b, \quad h_0 = 0, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = h_n = 0.$$

La ecuación será:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{|x-a|}{x-a} - \frac{|x-b|}{x-b}\right).$$

El físico inglés Oliver Heaviside (1850-1925) realizó estudios sobre circuitos eléctricos utilizando métodos de cálculo que conducían a resultados acordes con la realidad, pero que no eran matemáticamente aceptables. Formuló el llamado "escalón unidad", que es cero para $x < 0$ y 1 si $x > 0$. El símbolo de esta función es $Y(x)$, y su expresión sale rapidamente de la fórmula (2.4b), quedándonos:

$$Y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{x} + 1\right).$$

Como la oscilación en cero es $h_1 - h_0 = 1$, la derivada de $Y(x)$ según las distribuciones será $Y'(x) = \delta$, puesto que

$$\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} Y\varphi' \, dx = -\int_{0}^{\infty} Y\varphi' \, dx = -\int_{0}^{\infty} \varphi' \, dx = \varphi(0).$$

Pero $\varphi(0)$ es $\langle \delta, \varphi \rangle$. O sea:

$$\langle Y'(x), \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \Rightarrow \quad Y' = \delta.$$

Si el salto del escalón de Heaviside se produce en un punto $x_0 \neq 0$, la expresión de tal escalonada es la traslación

$$Y(x - x_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x - x_0|}{x - x_0} + 1\right)$$

de $Y(x)$. La derivada de $Y(x - x_0)$ según las distribuciones será la delta desplazada δ_{x_0}

Hemos venido refiriéndonos a la delta como distribución unas veces y como función otras. Hemos dicho también que fue el gran físico inglés Paul Dirac quien la introdujo como tal función en la Mecánica cuántica. Conviene saber, a grandes rasgos, de qué manera se produce su presencia.

Supongamos que existe un conjunto *discreto* de funciones $\{u_n(x)\}$, de cuadrado integrable, que forman una base ortogonal de un espacio de Hilbert. Toda función de este espacio es una combinación lineal de las $u_n(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_n c_n u_n(x).$$

Para determinar los coeficientes c_n, multipliquemos ambos miembros por una función $u_k(x) \in \{u_n(x)\}$, e integremos así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x)\varphi(x) \, dx = \sum_n c_n \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_n(x) \, dx.$$

Las integrales del segundo miembro son los productos escalares $u_k(x) \cdot u_n(x)$. Si $n \neq k$ dichas integrales son nulas, y si $n = k$, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_k(x) \, dx$$

es el cuadrado de una norma. Pero podíamos haber normalizado previamente las $u_n(x)$, multiplicándolas por una constante, de tal modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_k(x) \, dx = 1$$

En tal caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x)\varphi(x) \, dx = c_k \int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_k(x) \, dx = c_k.$$

Y también

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x)\, u_n(x)\, dx = \delta_K(k, n) \equiv \text{ delta de Kronecker.}$$

Ocurre, sin embargo, que a veces es necesario emplear bases *continuas*, en lugar de discretas. Es decir,

$$\varphi(x) = \int_{\xi} c(\xi)\, u_\xi(x)\, d\xi$$

¿Cómo se define entonces la ortogonalidad de las $u_\xi(x)$? Sigamos el procedimiento de antes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\xi} c(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, u_\xi(x)\, dx \right) d\xi.$$

Podríamos decir:

$$f(\xi, \xi') = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, u_\xi(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{cuando} \quad \xi' = \xi \\ 0 & \text{“} \quad \xi' \neq \xi \end{cases} . \tag{2.4c}$$

Pero esto no es posible. En efecto; lo que estamos diciendo es que

$$\int c(\xi) f(\xi, \xi')\, d\xi = 0$$

siempre, porque $f(\xi, \xi') = 0$ para todo ξ, excepto para $\xi = \xi'$. Entonces, el integrando sólo es distinto de cero en un conjunto de medida nula. Por lo tanto, la integral es cero. Y así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall u_{\xi'}(x),$$

lo cual implica que $\varphi(x)$ es idénticamente nula. En consecuencia, la normalización (2.4c) no es válida.

Resumiendo: Si queremos que se tenga

$$c(\xi') = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, \varphi(x)\, dx, \tag{2.4d}$$

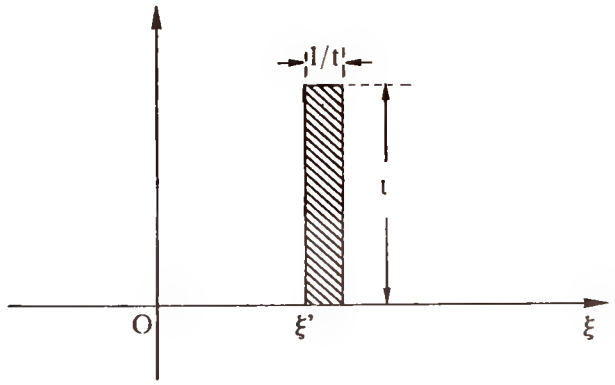
por analogía con el caso de base discreta, no podemos formular (2.4c). Para que fuese posible (2.4d) haría falta que

$$\int_{\xi} c(\xi) f(\xi, \xi')\, d\xi = \begin{cases} c(\xi') & \text{cuando} \quad \xi' = \xi \\ 0 & \text{“} \quad \xi' \neq \xi \end{cases} \tag{2.4e}$$

Pues bien: definamos $f(\xi, \xi')$ a partir de esta correspondencia. Estudiando (2.4e), resulta que $f(\xi, \xi')$ tiene la forma representada en la figura. O sea, que

$$f(\xi, \xi') = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x) u_\xi(x)\, dx$$

es "como" la delta de Kronecker, pero de *amplitud infinita*, para "compensar" que $f(\xi, \xi')$ es distinta de cero en un solo punto, y así la integral de (2.4e) pueda ser finita.



Por lo tanto, las normalizaciones para bases discretas y continuas son, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_k(x) u_n(x)\, dx = \text{ delta de Kronecker} = \delta_K(k, n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi'}(x)\, u_\xi(x)\, dx = \text{ delta de Dirac} = \delta(\xi - \xi').$$

2.5. Poligonales

Integrando la expresión de una escalonada podemos obtener la de una poligonal rectilínea unívoca. Pero los puntos de discontinuidad de la escalonada no aseguran la existencia de vértices después de integrar. Para que haya vértices, es decir, para que haya poligonal, debemos dar a las constantes de integración de cada término determinados valores.

Integremos la expresión (2.4a) del apartado 2.4, que es la de una escalonada genérica:

$$\int f(x)\, dx = a_1 \int \frac{|x - x_1|}{x - x_1}\, dx + \ldots + a_n \int \frac{|x - x_n|}{x - x_n}\, dx + bx + k.$$

Se trata de integrales indefinidas, donde las fracciones $|x - x_i|/(x - x_i)$ salen de las integrales en virtud del convenio aceptado en 2.1. Tenemos:

$$\int f(x)\, dx = a_1 \frac{|x - x_1|}{x - x_1}(x + c_1) + \ldots + a_n \frac{|x - x_n|}{x - x_n}(x + c_n) + bx + k$$

Si damos a las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ los valores $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ respectivamente, nos queda:

$$\int f(x)\,dx = a_1|x - x_1| + a_2|x - x_2| + \ldots + a_n|x - x_n| + bx + k, \qquad (2.5a)$$

que es una función continua, y expresa una poligonal unívoca con vértices en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cuyos lados tienen pendientes iguales, respectivamente, a las alturas de los segmentos de la escalonada (2.4a). Así, pues, toda expresión de la forma (2.5a) es la de una poligonal unívoca rectilínea, y recíprocamente. Dada una ecuación del tipo (2.5a), es muy fácil dibujar la poligonal.

Si nos dan la gráfica, se obtiene también fácilmente su ecuación en la forma (2.5a).[1] Como ejemplo, integremos la escalonada de la figura 2.a. Tenemos:

$$\int y\,dx = -\frac{2}{3}\frac{|x+2|}{x+2}(x+c_1) + \frac{1}{3}\frac{|x-2|}{x-2}(x+c_2) + \frac{2}{3}x + k.$$

Dando los valores $c_1 = 2$, $c_2 = -2$, nos queda:

$$\int y\,dx = -\frac{2}{3}|x+2| + \frac{1}{3}|x-2| + \frac{2}{3}x + k,$$

cuya gráfica es la poligonal de la figura 2.b, con $k = 1$.

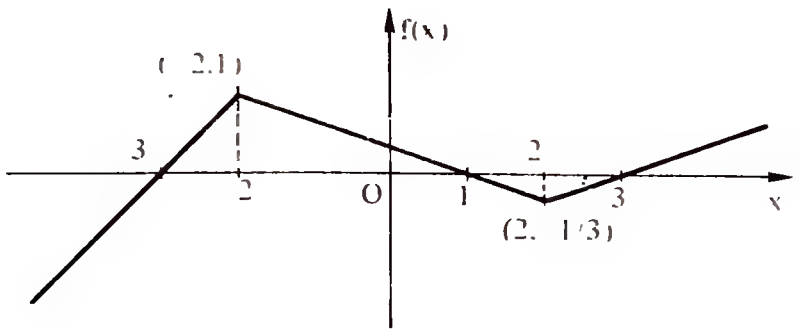


Figura 2.b

2.6. Escalonadas periódicas

Consideremos la gráfica periódica de la figura 2.c constituida por dos segmentos rectilíneos AB, CD paralelos al eje t a las alturas h_1, h_2 respectivamente, con un salto

[1] En los trabajos más generales sobre poligonales rectilíneas de cualquier tipo, citados en las notas bibliográficas, puede verse que una poligonal unívoca, como otras que no lo son, tiene más de una expresión que la representa.

en $t = t_1$. Estos dos segmentos (abiertos) son los que se repiten; el período mínimo es $T \neq 0$.

Por otra parte, sea $\varphi(t)$ una función periódica que cumple las siguientes condiciones:

1ª) Tiene período mínimo T.

2ª) Pasa por los puntos $(0,0)$, $(t_1,0)$, $(T,0)$.

3ª) Es positiva en el subintervalo $(0,t_1)$ y negativa en (t_1,T).

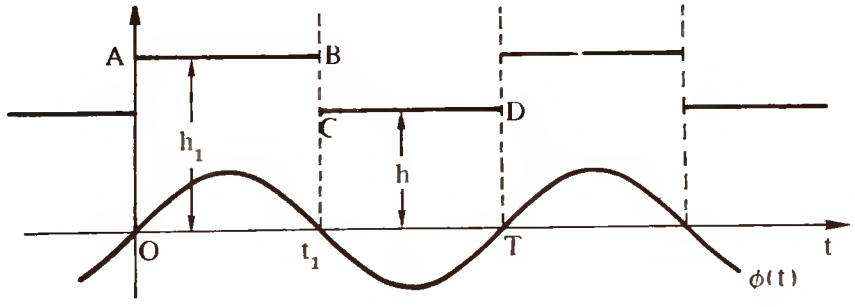


Figura 2.c

La hemos representado en la figura por una curva de forma sinusoidal. Entonces, la función $S(t) = |\varphi(t)|/(\varphi(t))$ es también periódica del mismo período T, y vale 1 en $(0,t_1)$ y -1 en (t_1,T).

Establezcamos ahora una función de la forma

$$f(t) = aS(t) + b.$$

Para todo $t \in (0,t_1)$ es $f(t) = a+b$, y para todo $t \in (t_1,T)$ será $f(t) = -a+b$. Si queremos que en $(0,t_1)$ la función $f(t)$ valga h_1 (altura a la que está el segmento AB), y que en (t_1,T) valga h_2, tendrá que ser:

$$\begin{cases} a+b &= h_1 \\ -a+b &= h_2 \end{cases},$$

de donde

$$a = \frac{1}{2}(h_1 - h_2), \qquad b = \frac{1}{2}(h_1 + h_2).$$

La $f(t)$ queda así:

$$f(t) = \frac{1}{2}\Big[(h_1 - h_2)\,S(t) + h_1 + h_2\Big]$$

Resulta entonces:

i) $f(t)$ es periódica de período T.

2i) $f(t)$ es la expresión de la gráfica escalonada periódica de la figura 2.c.

3i) $f(t)$ no está definida en los ceros de $\varphi(t)$ y, por lo tanto, no incorpora a la gráfica en dichos ceros puntos extraños.

Si en lugar de haber un solo salto en $t_1 \in (0, T)$ hubiera en dicho intervalo n saltos en los puntos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ respectivamente, escogeríamos n curvas periódicas $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ que cumplieran, para cada t_i las tres condiciones exigidas anteriormente a $\varphi(t)$. Consideraríamos después las periódicas $S_i(t) = |\varphi_i(t)|/(\varphi_i(t))$ y estableceríamos una función $f(t)$ del siguiente modo:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, S_i(t) + b.$$

Para que $f(t)$ sea la expresión de una gráfica periódica escalonada de período T, con n saltos en los t_i y con alturas $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$, los $n+1$ coeficientes a_i, b han de satisfacer al sistema

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b = h_1 \\ -a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b = h_2 \\ -a_1 - a_2 + \ldots + a_n + b = h_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_1 - a_2 - \ldots - a_n + b = h_{n+1} \end{cases}$$

que tiene solución única.

Podemos introducir directamente en $f(t)$ las alturas $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ de los segmentos de la gráfica periódica observando lo siguiente:

- $\frac{1}{2}\Big(S_1(t) + 1\Big)$ vale 1 en el subintervalo $(0, t_1)$ y cero en los demás.
- $\frac{1}{2}\Big(S_{k+1}(t) - S_k(t)\Big)$ vale 1 en (t_k, t_{k+1}) y cero en los demás.
- $\frac{1}{2}\Big(1 - S_n(t)\Big)$ vale 1 en (t_n, T) y cero en los demás.

Entonces nos queda:

$$f(t) = \frac{1}{2}\left[h_1\left(S_1(t)+1\right) + \sum_{k=1}^{n-1} h_{k+1}\left(S_{k+1}(t) - S_k(t)\right) + h_{n+1}\left(1 - S_n(t)\right)\right]$$

He aquí, pues, cómo una gráfica periódica escalonada puede ser expresada por medio de una suma de un número finito de sumandos. También puede ser expresada, como sabemos, por una serie de Fourier, la cual introduce puntos extraños en las discontinuidades. Claro es que una serie lleva implícito el carácter de aproximación, lo que no ocurre con una suma finita.

Si el período mínimo de una de estas escalonadas es $T = \pi$, las funciones o curvas $\varphi_i(t)$ que hemos de escoger con las tres condiciones antes expuestas pueden ser las siguientes:

$$\varphi_i(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t_i - t); \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

pues cada una de ellas $\varphi_k(t)$ es periódica de período π, pasa por los puntos $(0,0)$, $(t_k,0)$, $(\pi,0)$, y es positiva en $(0,t_k)$ y negativa en (t_k,π), como puede comprobarse sin dificultad. Las $S_i(t)$ serán entonces:

$$S_i(t) = \frac{|\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t_i - t)|}{\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t_i - t)}.$$

Para otro período cualquiera $T \neq \pi$, podemos poner $T = \pi/\lambda$. Entonces, la curva

$$\varphi_k(t) = \operatorname{sen}\ \lambda t \operatorname{sen}\ \lambda(t_k - t)$$

tiene ese mismo período π/λ y cumple las otras dos condiciones. O sea, siempre es posible utilizar como funciones $\varphi(t)$ un producto de dos senos, cualquiera que sea el periodo. [2]

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

1. El problema de la expresión de una línea poligonal por medio de una sola ecuación fue planteado por Fourier alrededor del año 1800.

   Henri Lebesgue publicó en 1898 unos trabajos sobre aproximación de las funciones, y en uno de ellos da la ordenada de una línea poligonal unívoca por medio de una función

$$y = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k[|x - x_k| + x - x_k].$$

[2] En las notas bibliográficas que damos a continuación encontrará el lector antecedentes de las cuestiones tratadas en este capítulo y los nombres de los matemáticos que se ocuparon de ellas.

2. El primer trabajo importante sobre líneas poligonales se debe al matemático italiano G. Tacchella, que en 1933 publicó en el *Giornale di Matematiche di Battaglini* (3ª serie, 24, 1933) una extensa memoria titulada: *Fondamenti di Geometria anallitica a due ed a tre dimensioni dei luoghi lineari ≪composti≫*, donde desarrolla los fundamentos de la analítica de las poligonales rectilíneas.

   A este trabajo siguieron otros dos, uno de ellos sobre poligonales simétricas.

3. Ocho años después, y sin conocer los trabajos de Tacchella ni poseer bibliografía alguna sobre esta cuestión (a pesar de haberla buscado, como es lógico), el matemático español Arturo Fraile Ovejero, fallecido en 1943 a los veintisiete años de edad, y hermano del autor de este libro, llegó a los mismos resultados que el italiano; resultados que publicó al año siguiente en la *Revista matemática Hispano-Americana*, 4ª serie, tomo II, 1942, Madrid, bajo el título (no puesto por él). "Ampliación de la Geometría analítica ordinaria".

   Antes de publicar su trabajo, Arturo Fraile hizo otra tentativa buscando posibles fuentes de información sobre el tema con algunos catedráticos y profesores de la Universidad de Madrid. Fue el profesor Ancochea quien recordó haber visto años antes alguna revista con un trabajo sobre poligonales y quien, al fin, la encontró. Se trataba de la Memoria de Tacchella.

   A pesar de la prioridad italiana, el trabajo de Arturo fue publicado, tanto por seguir un método distinto como por tratar contornos de polígonos cóncavos, contornos de triángulos y poligonales curvilíneas, casos no considerados por Tacchella.

   Ambos trabajos, el italiano y el español, desarrollan los fundamentos de la Geometría analítica de las poligonales (abiertas, cerradas, con o sin puntos múltiples), de los recintos planos y de los conjuntos discretos de segmentos, puntos, etc.

   Con anterioridad, Arturo había publicado en la revista *Euclides* (Madrid) algunos artículos sobre la poligonal uniforme (unívoca), y también sobre lugares geométricos de puntos que son áreas en el plano. Y precisamente la idea de la ecuación de una poligonal le surgió a propósito de este tipo de lugares. Otro matemático español, el bilbaino Carmelo Crespo Landaluce, había iniciado y desarrollado el estudio de los lugares de puntos que resultan ser recintos planos, muchos de los cuales tenían contornos poligonales, con una propiedad específica para los puntos de cada contorno. Y esto fue lo que indujo a Arturo a buscar una sola ecuación que expresase dicha propiedad y, por lo tanto, la propia poligonal. Hay ejemplos publicados donde ya se obtiene estas ecuaciones en casos concretos, en los años 1935 y 1936.

4. En 1942, Arturo Fraile publicó en la revista *Euclides* el avance de un trabajo titulado "Derivación e integración de funciones de variable real tomadas en valor absoluto", donde se inicia el tratamiento diferencial de las funciones con barras apoyado en el convenio de hacer nula la derivada $|u|/u$ en los ceros de u. El trabajo completo fue publicado en la *Revista de la Unión Matemática Argentina* (vol. X, núm. 3, 1945, Buenos Aires) y en la revista *Las Ciencias* (Madrid) como homenaje a la memoria del autor fallecido.

5. La teoría de las distribuciones fue establecida por Laurent Schwartz en los años 50, y parece que surgió a propósito de un trabajo de Choquet y Deny publicado en el Boletín de la Sociedad Matemática de Francia, titulado "Sur quelques propiétés de moyenne caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques", donde demuestran que si Ω es un dominio de R^2, toda función continua definida en Ω se puede aproximar con uniformidad en todo subconjunto compacto de Ω por medio de combinaciones lineales de ciertos elementos, bajo determinadas condiciones. Schwartz generalizó este resultado para $\Omega \subset R^n$, siendo $n \geqslant 2$. Tampoco hay que olvidar los espacios vectoriales topológicos que, asimismo, contribuyeron a la teoría de Schwartz.

6. La importancia de la función delta de Dirac puede comprobarse estudiando cualquier tratado de Física Cuántica. Por ejemplo, la magnífica obra *Quantum Mechanics*, de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu y Frank Laloë, edición en inglés de John Wiley & Sons, 1977, New York (traducido del francés, de Hermann.-París).

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. *Estudiar y dibujar la curva cuya ecuación es*

$$y = \left| \frac{1}{2} x^2 - 1 \right| (2x + 1)$$

Solución:

Es un problema elemental que no ofrece dificultad. La expresión entre barras es una parábola ordinaria, positiva en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, \infty)$ y negativa en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Por lo tanto, en los dos primeros intervalos referidos podemos suprimir las barras, y en ellos la función y es la cúbica

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1.$$

En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ la función es la cúbica opuesta. Y podemos asegurar que en $x = \pm\sqrt{2}$ hay puntos angulosos.

El estudio sistemático de estas cúbicas (crecimiento, máximos, etc.) puede hacerse directamente sobre la ecuación dada $y = |x^2/2 - 1|(2x + 1)$, con lo cual tenemos la ocasión de emplear el método descrito en este capítulo.

a) *Continuidad*: la función dada por la ecuación es continua para todo x por serlo los dos factores del segundo miembro.

b) *Contactos con los ejes:* Los ceros de las expresiones entre barras y entre paréntesis nos dan $y = 0$. Por lo tanto, los contactos con el eje x son:

$$A(-\sqrt{2}, 0), \quad B(-\frac{1}{2}, 0), \quad C(\sqrt{2}, 0)$$

El contacto con el eje y será $D(0, 1)$.

c) *Crecimiento:* La derivada primera de la función dada es

$$y' = \frac{\left|\frac{1}{2}x^2 - 1\right|}{\frac{1}{2}x^2 - 1} x(2x+1) + 2\left|\frac{1}{2}x^2 - 1\right| = \frac{|x^2-2|}{x^2-2}(2x^2+x) + |x^2-2| =$$

$$= |x^2-2|\left(\frac{2x^2+x}{x^2-2} + 1\right) = \frac{|x^2-2|}{x^2-2}(3x^2+x-2).$$

Cuando los dos factores del último miembro tengan igual signo, la derivada será positiva y la curva será creciente. La parábola $3x^2 + x - 2$ es positiva en $(-\infty, -1)$ y en $(2/3, \infty)$; es negativa en $(-1, 2/3)$. La fracción $|x^2-2|/(x^2-2)$ es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2})$ y en $(\sqrt{2}, \infty)$; es negativa en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Por lo tanto, y' es positiva en los subintervalos siguientes: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-1, 2/3)$, $(\sqrt{2}, \infty)$; es negativa en $(-\sqrt{2}, -1)$ y en $(2/3, \sqrt{2})$.

Puesto que la curva es continua y tenemos ya los subintervalos de crecimiento y decrecimiento, es obvio que hay máximos relativos en $x = -\sqrt{2}$, $x = 2/3$; y mínimos relativos en $x = -1$, $x = \sqrt{2}$; pero algunos de estos máximos y mínimos son puntos angulosos, como veremos después. Sin embargo, aplicaremos las reglas conocidas para obtenerlos.

d) *Máximos y mínimos relativos ordinarios*: La derivada segunda es

$$y'' = \frac{|x^2-2|}{x^2-2}(6x+1).$$

Si igualamos a cero la derivada primera, ello implica $3x^2 + x - 2 = 0$, pues el factor $|x^2 - 2|/(x^2 - 2)$ no se anula para ningún x. Tenemos así $x_1 = -1$, $x_2 = 2/3$, que sustituidos en y'' dan

$$y''(-1) = 5 > 0, \quad y''\left(\frac{2}{3}\right) = -5 < 0.$$

Luego hay mínimo en $x_1 = -1$ y máximo en $x_2 = 2/3$. Las coordenadas del mínimo son $(-1, -1/2)$, y las del máximo son $(2/3, 49/27)$.

e) *Concavidad:* Nos la da el signo de la derivada segunda. El factor lineal $6x + 1$ es negativo para $x < -1/6$ y positivo para $x > -1/6$. Los signos de

$$\frac{|x^2-2|}{(x^2-2)}$$

ya los vimos antes. Resulta, pues, que $y'' > 0$ en los subintervalos $(-\sqrt{2}, -1/6)$, $(\sqrt{2}, +\infty)$, y en ellos la curva es cóncava hacia arriba. Es $y'' < 0$ en $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-1/6, \sqrt{2})$ donde la curva es cóncava hacia abajo (convexa).

f) *Inflexiones:* De $y'' = 0$ se deduce $x = -1/6$; y en este punto cambia de signo y'' como acabamos de ver. Luego hay inflexión en $x = -1/6$. Las coordenadas son $(-1/6, 71/108)$.

g) *Puntos angulosos:* La primera derivada

$$y' = \frac{|x^2-2|}{x^2-2}(3x^2+x-2)$$

es continua en todo x excepto en $x = \pm\sqrt{2}$, donde no está definida. En estos dos puntos las derivadas laterales son:

$$\lim_{x \to -\sqrt{2}^-} y' = 4 - \sqrt{2}; \qquad \lim_{x \to -\sqrt{2}^+} y' = -4 + \sqrt{2}:$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^-} y' = -4 - \sqrt{2}; \qquad \lim_{x \to \sqrt{2}^+} y' = 4 + \sqrt{2}.$$

Luego la curva tiene puntos angulosos en $x = \mp\sqrt{2}$.

h) *Asíntotas*: Por ser la función continua para todo x, no hay asíntotas paralelas al eje y. Tampoco las hay en la dirección del eje x, pues $y \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Finalmente, no hay asíntotas oblicuas, como se deduce de la simple observación del cociente

$$\frac{y}{x} = \left|\frac{1}{2}x^2 - 1\right| \left(2 + \frac{1}{x}\right).$$

i) *Gráfica:* Con los datos que nos suministran los resultados anteriores, la curva puede dibujarse aceptablemente, tal como indica la figura 1.

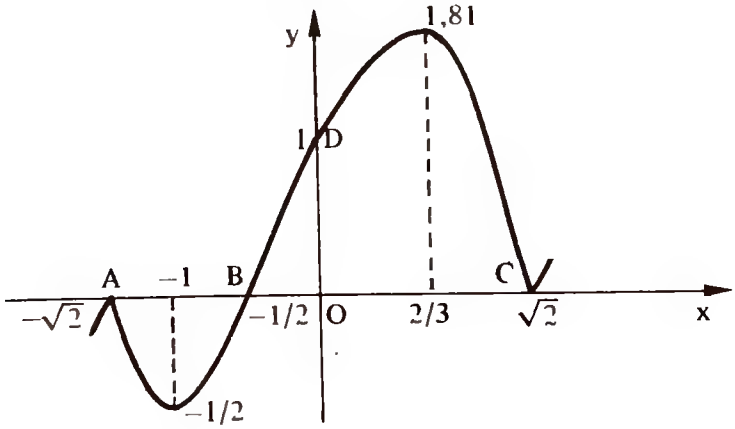


Figura 1

2. *Se considera la función real definida por*

$$f(x) = \frac{1}{|x+3| + |x+1| + |x-2| + |x-5|}$$

y se pide obtener su máximo y representarla gráficamente.

Propuesto en la fase final de la XII Olimpiada Matemática española.

El denominador de $f(x)$ es la expresión de una poligonal rectilínea unívoca y positiva para todo x. Los vértices son:

$$V_1(-3, 15),\ V_2(-1, 11),\ V_3(2, 11),\ V_4(5, 17).$$

Se observa que el lado V_2V_3 es paralelo al eje x a la altura 11 sobre él, siendo esta ordenada 11 la más pequeña de los puntos de la poligonal. Por lo tanto, dicho denominador es mínimo en $[-1, 2]$, y la función $f(x)$ será máxima para todo $x \in [-1, 2]$.

Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados de la poligonal salen sin dificultad sustituyendo las barras por paréntesis y anteponiéndoles signos (−) a todos ellos para el primer lado, a los tres últimos binomios para el segundo lado, etc. Los ladosson, pues:

$$y = -4x + 3 \quad \text{en} \quad (-\infty, -3], \quad y = -2x + 9 \quad \text{en} \quad [-3, -1],$$
$$y = 11 \quad \text{en} \quad [-1, +2], \quad y = 2x + 7 \quad \text{en} \quad [2, 5], \quad y = 4x - 3 \quad \text{en} \quad [5, +\infty).$$

Por lo tanto, los arcos de curva que constituyen la gráfica en cada uno de dichos intervalos serán, respectivamente:

$$g_1(x) = \frac{1}{-4x+3}, \quad g_2(x) = \frac{1}{-2x+9}, \quad g_3(x) = \frac{1}{11}, \quad g_4(x) = \frac{1}{2x+7}, \quad g_5(x) = \frac{1}{4x-3},$$

que son hipérbolas, excepto (claro está) 1/11. Además,

$$g_1(-3) = g_2(-3), \quad g_2(-1) = g_3(-1), \ldots$$

O sea, $f(x)$ es una poligonal curvilínea.

3. *Estudiar la función*

$$f(x) = \frac{1}{2(|x-3|-1)}$$

y representarla gráficamente.

Este problema es análogo al anterior, aunque más general, porque la poligonal $|x-3|-1$ (contorno de un ángulo) corta al eje x.

La curva queda perfectamente conocida observando que en $(-\infty, 3)$ es la hipérbola $1/2(2-x)$, y en $(3, +\infty)$ es la hipérbola $1/2(x-4)$. Sin embargo, haremos el estudio conservando las barras.

La función $f(x)$ es continua excepto en $x = 2$ y en $x = 4$ donde se anula el denominador. Los límites laterales de $f(x)$ en $x = 2$ son: $f(2-) = +\infty$, $f(2+) = -\infty$, luego la recta $x = 2$ es asíntota. Asimismo se ve que también es asíntota la recta $x = 4$. Si

$$x \to \pm\infty, \quad f(x) \to 0,$$

por lo cual el eje x es otra asíntota. No hay asíntotas oblicuas. Para ningún x finito se anula $f(x)$, luego no hay contactos propios con el eje x. Para $x = 0$ es $f(x) = 1/4$, que es el corte con el eje y.

La primera derivada es

$$f'(x) = -\frac{1}{(2|x-3|-2)^2} 2 \cdot \frac{|x-3|}{x-3} = -\frac{|x-3|}{x-3} \frac{1}{2(|x-3|-1)^2}.$$

Cuando el factor $|x-3|/(x-3)$ es negativo, será $f'(x) > 0$, cosa que ocurre en $(-\infty, 3)$; pero debemos subdividir este intervalo en dos, porque en $x = 2$ no está definida $f(x)$. La función $f(x)$ es, pues, creciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, 3)$; en el punto $x = 2$ tiene discontinuidad infinita, como hemos visto antes. De igual modo se ve que $f(x)$ es decreciente en $(3, 4)$ y $(4, +\infty)$, con una discontinuidad infinita en $x = 4$.

La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{1}{(|x-3|-1)^3}.$$

Será positiva cuando sea $|x-3| > 1$, lo cual sucede en los intervalos $(-\infty, 2), (4, +\infty)$, donde la curva es cóncava hacia arriba. Es convexa en $(2, 4)$. Como los cambios de sentido de la concavidad se producen en $x = 2$, y $x = 4$ donde hay salto infinito, la curva carece de inflexiones.

No hay máximos ni mínimos relativos ordinarios. Pero en $x = 3$ hay un punto anguloso, pues $f'(3-) = 1/2$ y $f'(3+) = -1/2$. Las coordenadas de dicho punto son $(3, -1/2)$. La gráfica es la de la figura 2.

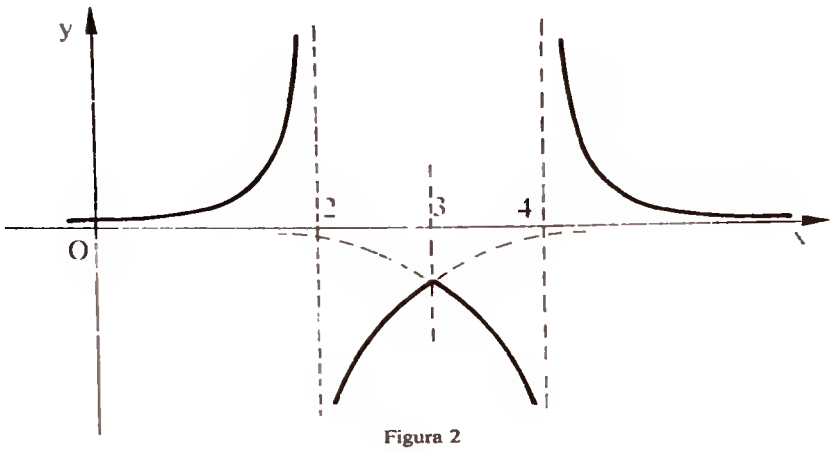


Figura 2

4. *Hallar las derivadas sucesivas de* $T_1(x) = |x| \operatorname{sen} x$ y $T_2(x) = |x| \cos x$.

NOTA: Este ejercicio está propuesto en el libro de L.Schwartz **Méthodes mathématiques pour les sciences physiques**; pero allí se pide las cuatro primeras derivadas de T_1 y T_2 en el sentido de las distribuciones. Nosotros emplearemos el otro método, y al final utilizaremos el de las distribuciones para hallar las dos primeras derivadas de T_2.

Las derivadas sucesivas de T_1 son:

$$T'_1 = \frac{|x|}{x} \operatorname{sen} x + |x| \cos x = |x| \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \right),$$

$$T''_1 = \frac{|x|}{x} \cos x + \frac{|x|}{x} \cos x - |x| \operatorname{sen} x = |x| \left(\frac{2 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right),$$

$$T'''_1 = -2\frac{|x|}{x} \operatorname{sen} x - \frac{|x|}{x} \operatorname{sen} x - |x| \cos x = -|x| \left(\frac{3 \operatorname{sen} x}{x} + \cos x \right),$$

$$T_1^{IV} = -3\frac{|x|}{x} \cos x - \frac{|x|}{x} \cos x + |x| \operatorname{sen} x = -|x| \left(\frac{4 \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right),$$

.....

Por lo tanto, las expresiones generales de las derivadas pares e impares son:

$$\left.\begin{aligned} T_1^{(2n} &= (-1)^{n+1} |x| \left(\tfrac{2n \cos x}{x} - \operatorname{sen} x \right) \\ T_1^{(2n+1} &= (-1)^n |x| \left(\tfrac{(2n+1) \operatorname{sen} x}{x} + \cos x \right) \end{aligned}\right\} n = 0, 1, 2, \ldots$$

De forma análoga se llega a las expresiones generales de las derivadas pares e impares de T_2, que son:

$$\left.\begin{aligned} T_2^{(2n} &= (-1)^n |x| \left(\tfrac{2n \operatorname{sen} x}{x} + \cos x\right) \\ T_2^{(2n+1} &= (-1)^n |x| \left(\tfrac{(2n+1)\cos x}{x} - \operatorname{sen} x\right) \end{aligned}\right\} n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vamos a hallar ahora las derivadas primera y segunda de T_2 en el sentido de las distribuciones. Simplificaremos la notación, dando a las funciones el trato de las distribuciones.

Tenemos sucesivamente:

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = \langle (|x| \cos x)', \varphi \rangle = -\langle |x| \cos x, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbf{R}} |x| \cos x \varphi'(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cos x\, \varphi'(x)\, dx - \int_{0}^{+\infty} x \cos x\, \varphi'(x)\, dx = x \cos x\, \varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} -$$

$$- \int_{-\infty}^{0} (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, \varphi(x)\, dx - \Big(x \cos x\, \varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} -$$

$$- \int_{0}^{+\infty} (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, \varphi(x)\, dx \Big).$$

Las partes integradas son nulas (φ es cero fuera de un compacto de $\mathbf{R}$). Nos queda:

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = \int_{0}^{\infty} (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Podemos hacer intervenir a la función $|x|/x$, que es -1 en $(-\infty, 0)$ y $+1$ en $(0, +\infty)$. Tendremos:

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{|x|}{x} (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Pero esta integral es, justamente, la distribución definida por $|x|/x\,(\cos x - x \operatorname{sen} x)$ actuando sobre las φ; es decir:

$$\langle T'_2, \varphi \rangle = \left\langle \frac{|x|}{x} (\cos x - x \operatorname{sen} x), \varphi(x) \right\rangle,$$

con lo cual será:

$$T'_2 = \frac{|x|}{x} (\cos x - x \operatorname{sen} x).$$

Vemos, pues, que la primera derivada de T_2 en el sentido de las distribuciones es la misma que la obtenida con el método anterior; basta hacer $n = 0$ en la expresión generál de $T_2^{(2n+1}$.

Hallemos ahora la derivada segunda de T_2. Se tiene sucesivamente:

$$\langle T''_2, \varphi \rangle = \langle (T'_2)', \varphi \rangle = \left\langle \left(\frac{|x|}{x} (\cos x - x \operatorname{sen} x) \right)', \varphi \right\rangle =$$

$$-\left\langle \frac{|x|}{x}(\cos x - x\operatorname{sen} x), \varphi' \right\rangle = -\int_{\mathbf{R}} \frac{|x|}{x}(\cos x - x\operatorname{sen} x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (\cos x - x\operatorname{sen} x)\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} (\cos x - x\operatorname{sen} x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= (\cos x - x\operatorname{sen} x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} (2\operatorname{sen} x + x\cos x)\varphi(x)\,dx -$$

$$-(\cos x - x\operatorname{sen} x)\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} (2\operatorname{sen} x + x\cos x)\varphi(x)\,dx.$$

Puesto que $\varphi(x)$ es nula fuera de un compacto, las partes integradas se reducen a $2\varphi(0)$; y haciendo intervenir la fracción $|x|/x$ en las integrales indicadas, nos queda:

$$\langle T''_2, \varphi \rangle = 2\varphi(0) - \int_{\mathbf{R}} \frac{|x|}{x}(2\operatorname{sen} x + x\cos x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Pero $2\varphi(0)$ es la distribución 2δ de Dirac actuando sobre las φ, y la integral es la distribución $|x|/x\ (2\operatorname{sen} x + x\cos x)$ actuando también sobre las φ. Por lo tanto:

$$\langle T''_2, \varphi \rangle = \langle 2\delta, \varphi \rangle - \left\langle \frac{|x|}{x}(2\operatorname{sen} x + x\cos x), \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle 2\delta - \frac{|x|}{x}(2\operatorname{sen} x + x\cos x), \varphi \right\rangle,$$

lo cual implica

$$T''_2 = -\frac{|x|}{x}(2\operatorname{sen} x + x\cos x) + 2\delta.$$

La parte principal (la que no contiene a δ) es la misma que la obtenida con el otro método como tal derivada segunda de T_2; basta hacer $n = 1$ en la expresión general de $T_2^{(2n}$ a la que llegamos anteriormente.

5. *Se define una función $f(t)$ del siguiente modo:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad x \in (2k, 2k+1) \\ 0 & \text{para} \quad x \in (2k+1, 2k+2) \end{cases} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Se pide encontrar una sola expresión funcional que sustituya a la definición dada y a la cual converja, en todo punto t, la serie de Fourier correspondiente.

Vemos que $f(t)$ es una escalonada periódica de período mínimo $T = 2$ (figura 3).

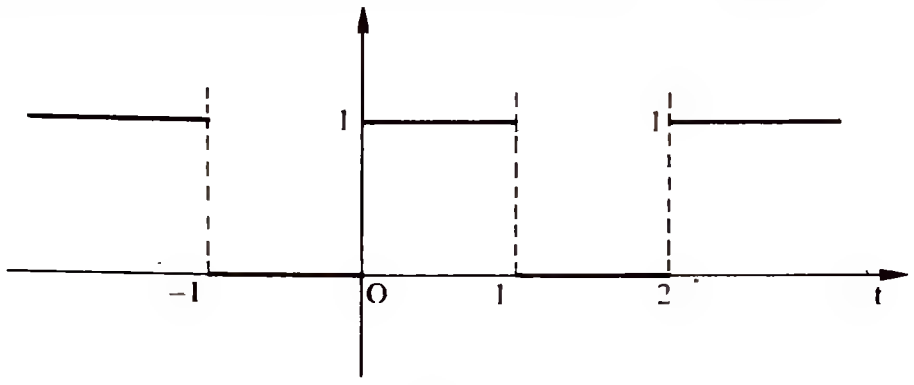


Figura 3

Recordemos que si en el intervalo $(0, T)$ hay un escalón formado por dos segmentos (abiertos) a las alturas h_1 y h_2 del eje t, la gráfica periódica en la que ambos segmentos se repiten indefinidamente puede ser expresada por la función

$$f(t) = \frac{1}{2}\Big((h_1 - h_2)\, S(t) + h_1 + h_2\Big),$$

donde

$$S(t) = \frac{|\varphi(t)|}{\varphi(t)},$$

siendo $\varphi(t)$ una curva periódica de período T que pasa por los puntos $(0,0)$, $(T,0)$ y por el punto de discontinuidad $(\xi,0)$. Además, $\varphi(t) > 0$ en el subintervalo $(0,\xi)$ y < 0 en (ξ, T). En nuestro caso (figura 4) nos sirve la sinusoide $\varphi(t) = \operatorname{sen} \pi t$.

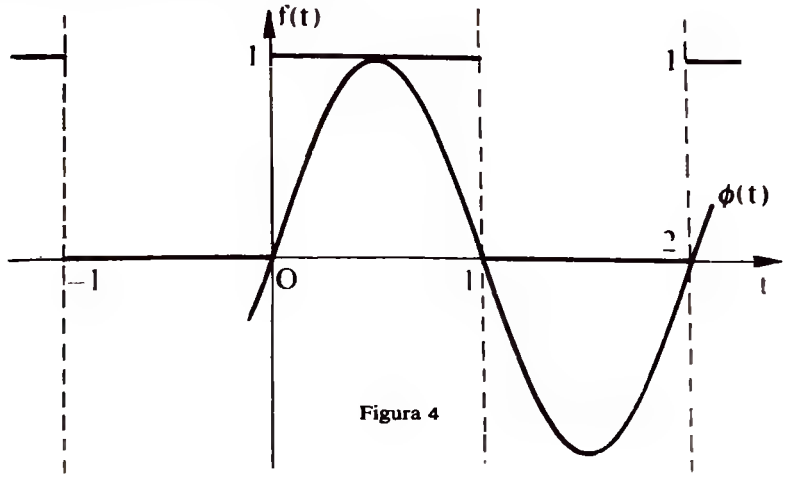


Figura 4

Tenemos también $h_1 - h_2 = h_1 + h_2 = 1$. Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{|\operatorname{sen} \pi t|}{\operatorname{sen} \pi t} + 1\right) \qquad [A].$$

Sabemos que una función $f(t)$ es desarrollable en serie de Fourier en todo punto donde admite derivada finita, y también en todo punto de discontinuidad con límites laterales finitos (en estos últimos la serie converge a la semioscilación). En nuestra gráfica, $\forall t \in \mathbb{R}$ ocurre cualquiera de ambas cosas, y en la función [A] que la expresa hay derivada finita (nula) cuando $t \notin \mathbb{Z}$. En las discontinuidades, $|\operatorname{sen} \pi t|/(\operatorname{sen} \pi t)$ tiene límites laterales finitos. Así, pues, la función expresada en [A] es desarrollable en serie de Fourier, aunque ésta introduce puntos extraños en las discontinuidades, que no están en [A].

Puesto que el período es $T = 2l = 2$, el desarrollo es

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi t.$$

Los coeficientes son:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-1}^{+1} f(t)\, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \left(\frac{|\operatorname{sen} \pi t|}{\operatorname{sen} \pi t} + 1 \right) dt = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^{+1} f(t) \cos n\pi t\, dt = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \left(\frac{|\operatorname{sen} \pi t|}{\operatorname{sen} \pi t} + 1 \right) \cos n\pi t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 \cos n\pi t\, dt = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-1}^{+1} f(t) \operatorname{sen} n\pi t\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left(\frac{|\operatorname{sen} \pi t|}{\operatorname{sen} \pi t} + 1 \right) \operatorname{sen} n\pi t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 \operatorname{sen} n\pi t\, dt = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Así, pues, tendremos:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|\operatorname{sen} \pi t|}{\operatorname{sen} \pi t} + 1 \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\operatorname{sen} \pi t + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\pi t + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5\pi t + \ldots \right).$$

6. *Encontrar una sola expresión simbólica de una función $y(x)$ definida del siguiente modo:*

$$y(x) = \begin{cases} f(x) & \text{para } x < x_0 \\ g(x) & \text{para } x > x_0 \end{cases}$$

donde se supone que f y g son continuas incluso en $x = x_0$, y que $y(x)$ no está definida en x_0.

Sea $h_1(x)$ una función que vale 1 cuando es $x < x_0$, y cero si es $x > x_0$.

Sea $h_2(x)$ una función que vale cero para todo $x < x_0$, y la unidad si es $x > x_0$.

Estas dos funciones h_1 y h_2 (de enunciado dicotómico) son las conocidas funciones de Heaviside, o escalones unidad en $x = x_0$, la primera descendente y la otra ascendente. Entonces, la función

$$y(x) = h_1(x) f(x) + h_2(x) g(x)$$

es igual a $f(x)\ \ \forall x < x_0$, e igual a $g(x)\ \ \forall x > x_0$. Pero toda función de Heaviside puede ser formulada mediante una expresión simbólica única, utilizando valores absolutos. Sabemos que las funciones de la forma

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{|x - x_k|}{x - x_k} + b$$

son escalonadas (ascendentes, descendentes o mixtas) con discontinuidad en los x_k. Por lo tanto, $h_1(x)$ se podrá formular del siguiente modo:

$$h_1(x) = a \frac{|x - x_0|}{x - x_0} + b,$$

donde ha de verificarse (en virtud del enunciado):

$$-a + b = 1, \quad a + b = 0.$$

O sea:

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$h_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\right).$$

Análogamente se obtiene:

$$h_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\right).$$

Luego será:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\right) f(x) + \left(1 + \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\right) g(x)\right],$$

que también podemos escribir así:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f(x) - g(x)]\right].$$

Los límites $y(x_0+)$, $y(x_0-)$ son, como se deduce inmediatemente de la expresión, $g(x_0)$ y $f(x_0)$ respectivamente. La oscilación en x es, pues, $g(x_0) - f(x_0)$.

7. *Hallar la 1^a derivada de la función del problema anterior en el sentido de las distribuciones utilizando la expresión simbólica única obtenida, y suponiendo que f y g son derivables, incluso en $x = x_0$, con derivada continua.*

La derivada de $y(x)$ en el sentido clásico, utilizando el convenio de ser nula la derivada de $|x - x_0|/(x - x_0)$, es:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left[f'(x) + g'(x) - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f'(x) - g'(x)]\right];$$

y si sumamos los términos en las deltas de Dirac, tendremos la derivada en el sentido de las distribuciones.

Resolvámoslo ahora con la derivación de distribuciones. Tenemos:

$$\langle y', \varphi\rangle = -\langle y, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[f(x) + g(x) - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f(x) - g(x)]\right]\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x) + g(x)]\varphi'(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f(x) - g(x)]\varphi'(x)\,dx.$$

Hagamos por partes la primera integral, y en la segunda subdividamos el intervalo de integración en dos:

$$(-\infty, x_0), \quad (x_0, +\infty),$$

en cada uno de los cuales la fracción $|x - x_0|/(x - x_0)$ vale -1 y 1 respectivamente. Tendremos:

$$\langle y', \varphi\rangle = -\frac{1}{2}[f(x) + g(x)]\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f'(x) + g'(x)]\varphi(x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0}[f(x) - g(x)]\varphi'(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty}[f(x) - g(x)]\varphi'(x)\,dx.$$

Como $\varphi(x)$ es nula fuera de un compacto, la parte integrada es cero. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[f'(x) + g'(x)]\varphi(x)\,dx$$

es, como sabemos, la distribución definida por $1/2(f' + g')$ actuando sobre las φ. Las dos últimas integrales las podemos hacer por partes. Nos queda:

$$\langle y', \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(f' + g'), \varphi\right\rangle - \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0}[f'(x) - g'(x)]\varphi(x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}[f(x) - g(x)]\varphi(x)\Big|_{x_0}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty}[f'(x) - g'(x)]\varphi(x)\,dx.$$

Las partes integradas se reducen a

$$-\frac{1}{2}[f(x_0) - g(x_0)]\varphi(x_0) - \frac{1}{2}[f(x_0) - g(x_0)]\varphi(x_0) =$$

$$= -[f(x_0) - g(x_0)]\varphi(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0).$$

Nos queda, pues:

$$\langle y', \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(f' + g'), \varphi \right\rangle + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x_0} [f'(x) - g'(x)]\varphi(x)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{\infty} [f'(x) - g'(x)]\varphi(x)\,dx + [g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0).$$

Las dos integrales pueden ser expresadas con una sola volviendo a introducir el factor $|x - x_0|/(x - x_0)$. Resulta:

$$\langle y', \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(f' + g'), \varphi \right\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f'(x) - g'(x)]\varphi(x)\,dx + [g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0).$$

Pero la integral que queda es la distribución definida por

$$\frac{1}{2}\quad\frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f'(x) - g'(x)]$$

actuando sobre $\varphi(x)$; es decir:

$$\left\langle \frac{1}{2}\quad\frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f'(x) - g'(x)], \varphi \right\rangle.$$

Por lo tanto

$$\langle y', \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}(f' + g'), \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2}\quad\frac{|x - x_0|}{x - x_0}(f' - g'), \varphi \right\rangle + [g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0) =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\left[f' + g' - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}(f' - g')\right], \varphi \right\rangle + [g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0).$$

Sabemos que es, por definición,

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0);$$

y también

$$\langle k\delta_{x_0}, \varphi\rangle = k\varphi(x_0).$$

Así, pues, el último término será

$$[g(x_0) - f(x_0)]\varphi(x_0) = \langle [g(x_0) - f(x_0)]\delta_{x_0}, \varphi\rangle.$$

Nos queda, finalmente,

$$\langle y', \varphi\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left[f' + g' - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}(f' - g')\right], \varphi \right\rangle + \langle [g(x_0) - f(x_0)]\delta_{x_0}, \varphi\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\left(f'(x) + g'(x) - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}[f'(x) - g'(x)]\right) + [g(x_0) - f(x_0)]\delta_{x_0}, \varphi \right\rangle.$$

Luego será:

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + g'(x) - \frac{|x - x_0|}{x - x_0}\,[f'(x) - g'(x)]\right) + [g(x_0) - f(x_0)]\delta_{x_0}.$$

Ya se advierte, una vez más, el ahorro de tiempo si empleamos el primer método.

CAPITULO 2

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

0. INTRODUCCION

0.1. Definiciones

Ecuación diferencial ordinaria es aquella donde figuran derivadas o diferenciales de diferentes órdenes de una función desconocida $y(x)$ de una sola variable independiente; podemos decir que es una ecuación donde aparece, al menos, una derivada de $y(x)$ de orden cualquiera. En general, una ecuación diferencial contiene también la propia función desconocida $y(x)$ y otras funciones conocidas de x no idénticamente nulas.

Por ejemplo, son ecuaciones diferenciales ordinarias las siguientes:

a) $y''' - y'^2 + 3y = 0$

b) $y' \operatorname{sen} x - y \cos x = 3x$

c) $y'' + (x^2 + 1)y'y'' = e^x$

d) $y' = \frac{xy}{x + y}$.

Con un simbolismo amplio, podemos expresar una ecuación diferencial ordinaria así:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Llamamos *orden* de una ecuación diferencial al de la derivada de mayor orden que figura en dicha ecuación. En los ejemplos anteriores, las ecuciones b) y d) son de primer orden. La c) es de segundo orden, y la a) de tercero.

Una ecuación es *lineal* cuando es lineal en y, y en sus derivadas, y no hay productos entre estas últimas ni entre ellas y la función y. En los ejemplos que hemos puesto antes, sólo es lineal la ecuación b). Las otras tres no lo son, porque la a) contiene el cuadrado de y'; en la c) figura el producto $y'y''$; y en la d) aparece el producto $y'y$ una vez quitado el denominador.

Resolver una ecuación diferencial es obtener, al menos, una función $u(x)$ que la satisfaga. Como se parte de una ecuación que contiene derivadas de $y(x)$ y se trata de llegar a una función $u(x)$ de carácter finito, emplearemos la palabra "integrar" en vez de "resolver".

Toda función $u(x)$ que satisface a una ecuación diferencial $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ es una *solución particular o curva integral* de dicha ecuación; y puede venir dada también en la forma implícita $U(x, y) = 0$.

El conjunto de las soluciones particulares de una ecuación diferencial ordinaria viene expresado, como veremos después, por la ecuación finita de una familia uniparamétrica, biparamétrica, etc., de curvas. A la ecuación de esta familia se le llama *solución general* de la ecuación diferencial. Dando valores a los parámetros o constantes se obtiene las soluciones particulares. Sin embargo, puede haber soluciones particulares *singulares*, que no están incluidas en la solución general.

Las ecuaciones diferenciales proceden de la Física donde, en general, interesa encontrar una solución que cumple determinadas condiciones previas exigidas por el problema de que se trate. Los matemáticos han de averiguar primero si esa solución existe y si es única. Refiriéndonos a las ecuaciones diferenciales ordinarias, se trata de saber si existe una curva integral que pasa por un punto dado y tiene en ese punto una tangente de pendiente conocida, una cierta concavidad, etc. Esta importante cuestión constituye el llamado "problema de Cauchy". En todo caso, dada una ecuación diferencial, debemos conocer el carácter del espacio de sus soluciones.

0.2. Constantes arbitrarias de la solución general

Consideremos la ecuación $y'' = f(x)$, donde $f(x)$ es continua en $I \subseteq \mathbb{R}$. Integrando dos veces obtendremos y; pero cada integración introduce una constante arbitraria. Si $g(x)$ es una primitiva de $f(x)$, y $h(x)$ es primitiva de $g(x)$, será: $y = h(x) + c_1 x + c_2$. Hemos llegado a una familia biparamétrica de curvas integrales de la ecuación $y'' = f(x)$. Dando valores a las constantes c_1 y c_2 obtendremos *todas* las soluciones particulares de dicha ecuación, y no hay ninguna función $u(x)$ que satisfaga a $y'' = f(x)$ que no proceda de dar valores a c_1 y c_2, puesto que se trata de un simple problema de cálculo integral. Así pues, $y = h(x) + c_1 x + c_2$ es la solución general de $y'' = f(x)$, y no existen soluciones singulares.

Consideremos ahora una ecuación diferencial de la forma

$$y'' = f(x, y, y') \tag{0.2a}$$

donde f es continua en un dominio del espacio tridimensional $(0; x, y, y')$. Esta ecuación puede no ser lineal y no es, en general, inmediatamente integrable, como lo era la ecuación del ejemplo anterior. Pero podemos dar una explicación intuitiva de que su solución general tiene también dos constantes arbitrarias. Lo haremos del siguiente modo:

A toda cuaterna de números (x, y, y', y'') que satisface a (0.2a) se le llama *elemento integral* de dicha ecuación. Obviamente, el conjunto de todas las cuaternas de números *arbitrarios* es cuadruplemente infinito (∞^4). Pero si imponemos a esas cuaternas la condición de ser elementos integrales de (0.2a), ya no son arbitrarios los cuatro números; el conjunto de los referidos elementos integrales será, pues, triplemente infinito (∞^3). Estos elementos integrales son los constitutivos de la familia de las curvas integrales de la ecuación dada. Y como cada curva integral es un conjunto simplemente infinito de puntos (∞^1), la familia de curvas integrales de (0.2a) será doblemente infinita (∞^2). Es decir, la solución general de la ecuación será una familia biparamétrica de curvas; tendrá, pues, dos constantes arbitrarias, tantas como orden tiene la ecuación. Pero aquí no podemos asegurar que no existen soluciones singulares, a menos que (0.2a) sea lineal.

Podemos atrevernos a generalizar y decir que la solución general de una ecuación diferencial de orden n tiene n constantes arbitrarias.

La ausencia de soluciones singulares sólo puede ser asegurada cuando la ecuación diferencial es lineal. Consideremos, por ejemplo, la ecuación *no lineal* de primer orden

$$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1.$$

Su solución general es la familia uniparamétrica de curvas.

$$y = x - (C - x)^2,$$

cosa que puede ser comprobada sin dificultad. Dando valores a C se obtiene las soluciones particulares. Pero también es solución particular la función $y = x$, que no está incluida en la solución general; es decir, no hay ningún valor de C que produzca $y = x$. Es esta última una solución singular.

Reconsideremos la ecuación de este último ejemplo:

$$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1$$

y su solución general $y = x - (C - x)^2$. Pues bien, también es solución la familia uniparamétrica $y = x - (C - |x|)^2$, como podemos comprobar fácilmente recordando lo dicho en el capítulo I sobre derivación de funciones tomadas en valor absoluto. Hay, pues, al menos dos familias *distintas* de curvas integrales de la ecuación considerada. Ahora bien, las funciones $x - (C - x)^2$ son continuas con derivada primera continua; o sea, son de clase 1. Pero las funciones $x - (C - |x|)^2$, aunque también son continuas, no tienen derivada primera continua, ya que esta derivada es

$$1 + 2\frac{|x|}{x}(C - |x|),$$

con una discontinuidad finita en $x = 0$, excepto para $C = 0$. No son, pues, funciones de clase 1. Son de aquellas que hemos llamado *soluciones amplias* en el capítulo 1.

Allí dijimos que las funciones de este tipo han de ser absolutamente continuas –como mostró Carathéodory– para que puedan ser soluciones de una ecuación diferencial.

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$y^{(n} + a_1(x)y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = h(x).$$

Si los coeficientes $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), h(x)$ son funciones continuas en $I \subseteq \mathbb{R}$, y se nos pide una solución $u(x)$ tal que $u(x)$ y sus $n-1$ primeras derivadas tomen valores prefijados *en un punto* $x = x_0 \in I$, las n constantes arbitrarias de la solución general de la ecuación quedan unívocamente determinadas, y la solución $u(x)$ existe y es única (existencia y unicidad en el problema de Cauchy).

Cuando estas condiciones previas se refieren a un solo punto $x = x_0$, tal como acabamos de decir, el problema de hallar $u(x)$ recibe el nombre de *problema de valores iniciales*. Si las condiciones previas se refieren a dos o más puntos $x = x_0, x = x_1, \ldots$, el problema de encontrar $u(x)$ que cumple dichas condiciones recibe el nombre de *problema de contorno*.

0.3. Ecuación diferencial de una familia de curvas

Si dada una familia n –paramétrica de curvas podemos eliminar los n parámetros o constantes entre la ecuación de dicha familia y sus n primeras derivadas sucesivas, llegaremos a la ecuación diferencial de la familia referida.

Por ejemplo, podemos obtener la ecuación diferencial de la familia de las circunferencias cuyos centros están en el eje x y son tangentes a las dos bisectrices de los cuadrantes de un plano cartesiano rectangular. Es decir, las circunferencias

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

donde es $\beta = 0, \quad \alpha^2 = 2r^2$. La ecuación de la familia descrita es, pues,

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = \frac{1}{2}\alpha^2,$$

con un parámetro α que eliminaremos entre dicha ecuación y su primera derivada $x - \alpha + yy' = 0$, obteniéndose la ecuación diferencial de primer orden, no lineal,

$$y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 = x^2.$$

Se trata, pues, de encontrar una ecuación diferencial conociendo su solución general.

Hagamos esto con cada una de las dos familias consideradas en el apartado anterior. La eliminación de C entre la familia de parábolas ordinarias $y = x - (C-x)^2$ y su derivada $y' = 1 + 2(C-x)$ nos da inmediatamente la ecuación

$$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1.$$

Pero las curvas de la familia

$$y = x - (C - |x|)^2$$

son poligonales de dos lados contenidos, respectivamente, en las parábolas

$$y = x - (C + x)^2, \quad y = x - (C - x)^2.$$

Los vértices $V_C = (0, -C^2)$ de estas poligonales son puntos angulosos, excepto para $C = 0$, valor que produce una única parábola $y = -x^2 + x$. Las derivadas laterales en cada vértice

$$V_C \neq (0, 0)$$

son diferentes. En la figura 1 representamos curvas de la familia

$$y = x - (C - |x|)^2$$

para $C = 0, 1$ y 2.

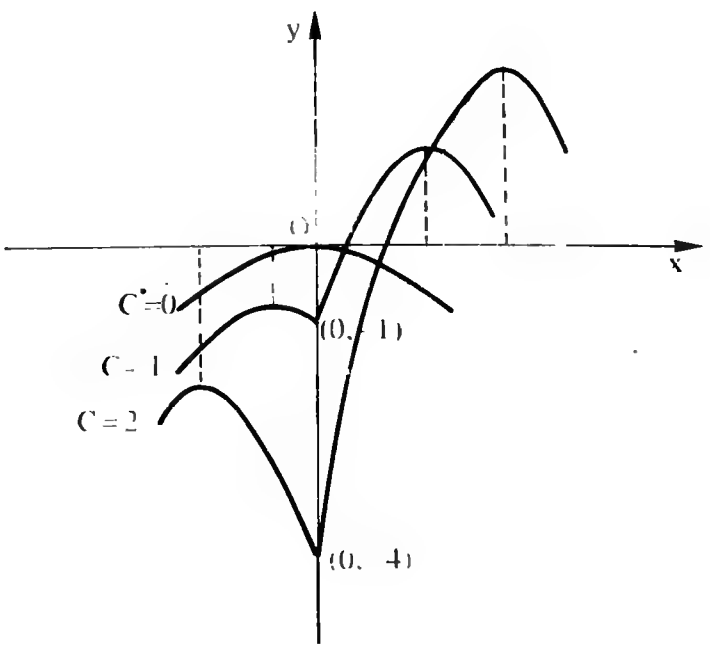


Figura 1

Las funciones de esta familia definen, cada una, una distribución. Podemos hallar la primera derivada de esta familia en el sentido de las distribuciones, y eliminar C entre ambas. Como las curvas de

$$y = x - (C - |x|)^2$$

son continuas, la derivada como distribución coincide con la que se obtiene utilizando el otro método explicado en el capítulo primero, que es más breve, y nos da inmediatamente

$$y' = 1 + 2\frac{|x|}{x}(C - |x|);$$

es decir,

$$C - |x| = \frac{y' - 1}{2\frac{|x|}{x}}.$$

Elevando esto al cuadrado y sustituyéndolo en

$$y = x - (C - |x|)^2$$

llegamos a la misma ecuación diferencial anterior:

$$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1,$$

puesto que el cuadrado de

$$\frac{y' - 1}{2\frac{|x|}{x}}.$$

hace innecesarias las barras. Esto nos confirma que dicha ecuación diferencial tiene curvas integrales de dos clases: unas en sentido estricto (de clase 1) y otras en sentido amplio (absolutamente continuas y, por lo tanto, derivables *para casi todo* x).

Es fácil comprobar que si en la familia $y = x - (C - |x|)^2$ damos a C dos valores opuestos k y $-k$, la curva integral correspondiente a $C = -k$ es la formada por las prolongaciones de los dos arcos de parábola que constituyen la curva integral corres-

pondiente a $C = k$ (figura 2). Los vértices de las poligonales de la familia son, pues, dobles.

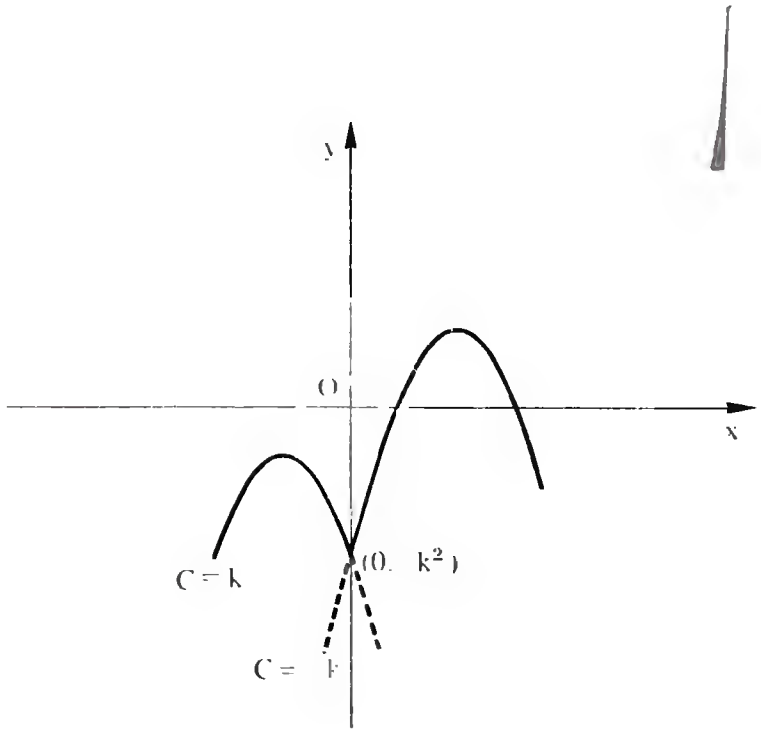


Figura 2

1. ECUACIONES DE LA FORMA: $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Las ecuaciones de la forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, o bien:

$$y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

se utilizan en la integración de ciertas ecuaciones en derivadas parciales, como veremos en el capítulo 4.

Supondremos en adelante que $P(x,y), Q(x,y)$ son funciones continuas en un dominio D de plano euclídeo $(0; x, y)$.

Dentro de este tipo de ecuaciones consideremos los casos siguientes:

1.1. Ecuaciones de variables separables

Si las funciones $P(x, y), Q(x, y)$ pueden ser descompuestas, cada una de ellas, en un producto de dos funciones, una sólo de x y otra sólo de y, se dice que la ecuación $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, es de variables separables, y su integración es inmediata. Si es

$$P(x, y) = a(x)\,b(y),\ Q(x, y) = f(x)\,g(y),$$

será

$$a(x)\,b(y)\,dx + f(x)\,g(y)\,dy = 0.$$

Dividiendo por $f(x)$ b(y) queda

$$\frac{a(x)}{f(x)}\,dx + \frac{g(y)}{b(y)}\,dy = 0,$$

donde ya están separadas las variables. Integrando, tendremos:

$$\int \frac{a(x)}{f(x)}\,dx + \int \frac{g(y)}{b(y)}\,dy = C,$$

que es la solución general de la ecuación.

Ejemplo:

En la ecuación $(2x - y - 2xy + 1)\,dx + (x - 2y + xy - 2)\,dy = 0$, los coeficientes pueden ser fácilmente descompuestos en productos del siguiente modo:

$$P(x, y) = 2x - y - 2xy + 1 = 2x(1 - y) + 1 - y = (2x + 1)(1 - y).$$

$$Q(x, y) = x - 2y + xy - 2 = x(1 + y) - 2(y + 1) = (x - 2)(y + 1).$$

La ecuación queda así:

$$(2x + 1)(1 - y)\,dx + (x - 2)(y + 1)\,dy = 0.$$

O sea:

$$\frac{2x + 1}{x - 2}\,dx + \frac{y + 1}{1 - y}\,dy = 0.$$

Hagamos las divisiones indicadas:

$$\left(2 + \frac{5}{x - 2}\right)dx - \left(1 + \frac{2}{y - 1}\right)dy = 0.$$

Integrando resulta

$$2x - y + \ln \frac{|(x-2)^5|}{(y-1)^2} = C,$$

que es la solución general.

1.2. Ecuaciones homogéneas

El calificativo "homogénea" aplicado a las ecuaciones diferenciales tiene dos significados distintos. Hemos dicho antes que una ecuación lineal de orden cualquiera es la de la forma general

$$y^{(n} + a_1(x)y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = h(x).$$

Pues bien, si $h(x)$ es idénticamente nula, la ecuación se llama homogénea; es decir,

$$y^{(n} + a_1(x)y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

es una ecuación lineal *homogénea* de orden n. Pero también se llama *homogénea* a una ecuación de la forma $y' = F(x, y)$ cuando el segundo miembro sólo depende del argumento y/x. Por ejemplo, es homogénea la ecuación

$$y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy},$$

porque dividiendo por x^2 ambos términos de la fracción nos queda

$$y' = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\frac{y}{x}}.$$

Vamos a referirnos a este segundo aspecto de la homogeneidad dando una definición equivalente.

Decimos que una ecuación de la forma

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

es homógenea cuando P y Q son funciones homogéneas *del mismo grado*.

Recordemos primero que $P(x, y)$ es una función homogénea de grado g si para todo $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ se verifica:

$$P(kx, ky) = k^g P(x, y).$$

Algunos ejemplos:

$$P(x,y) = \ln\frac{y}{x}; \quad P(kx,ky) = \ln\frac{ky}{kx} = \ln\frac{y}{x} = k^0 \ln\frac{y}{x}.$$

Luego $\ln\frac{x}{y}$ es función homogénea de grado cero. También son homogéneas de grado cero

$$\operatorname{sen}\frac{x^2+y^2}{xy},\ e^{x/y}, \quad \text{etc.}$$

La función

$$f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x}{y^5}}\ \operatorname{tg}\frac{y}{x}$$

es homogénea de grado $g = -1$, pues

$$\sqrt[4]{\frac{kx}{(ky)^5}}\ \operatorname{tg}\frac{ky}{kx} = \sqrt[4]{k^{-4}}\ \sqrt[4]{\frac{x}{y^5}}\ \operatorname{tg}\frac{y}{x} = k^{-1} f(x,y).$$

La función

$$h(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$$

es homogénea de grado $g = 1/3$, porque

$$\frac{kx+ky}{\sqrt[3]{(kx)^2+(ky)^2}} = \frac{k}{\sqrt[3]{k^2}}\ \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} = k^{1/3} h(x,y).$$

Todo polinomio entero de dos o más variables, cuyos términos tienen el mismo grado g es una función homogénea de grado g.

No son homogéneas las funciones

$$e^{xy},\ \ln(x+y),\ \cos(1-xy), \quad \text{etc.}$$

Si una función $P(x,y)$ es homogénea de grado g, y es diferenciable, se verifica la identidad de Euler:

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = g\ P(x,y).$$

Todo esto es generalizable a funciones de n variables.

Volvamos ahora a las ecuaciones diferenciales homogéneas de la forma

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

donde, como hemos dicho, P y Q son funciones homogéneas *del mismo grado* g. Si dividimos ambos miembros por x^g, las funciones P y Q pasan a depender del único argumento y/x; o sea, queda

$$P_1\left(\frac{y}{x}\right)dx + Q_1\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dx + \sqrt{x+y}\,dy = 0$$

es homogénea de grado $1/2$, como puede comprobarse. Dividiendo ambos miembros por $x^{1/2} = \sqrt{x}$, tenemos:

$$\left(1+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx + \sqrt{1+\frac{y}{x}}\,dy = 0.$$

Una vez obtenida la forma

$$P\left(\frac{y}{x}\right)dx + Q\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

hacemos el cambio $y/x = u$.

Si queremos conservar la variable x sustituiremos también dy por $x\,du + u\,dx$, y nos queda:

$$P(u)\,dx + Q(u)\,(x\,du + u\,dx) = [P(u) + u\,Q(u)]\,dx + x\,Q(u)\,du = 0,$$

que es una ecuación de variables separables. Haciendo la separación, tenemos:

$$\frac{dx}{x} + \frac{Q(u)}{P(u)+u\,Q(u)}\,du = 0.$$

Integrando será:

$$\ln|x| + \int \frac{Q(u)}{P(u)+u\,Q(u)}\,du = C.$$

Una vez resuelta la integral indicada, se restituye y deshaciendo el cambio.

Ejemplos:

1°) La ecuación lineal de primer orden $x - y + xy' = 0$ puede escribirse así:

$$(x-y)\,dx + x\,dy = 0.$$

Es homogénea de grado 1. Dividimos por x:

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)dx + dy = 0.$$

Hacemos $y/x = u$; $dy = xdu + udx$. Sustituimos:

$$(1 - u)\,dx + xdu + udx = dx + xdu = 0,$$

que es de variables separables. Tenemos: $dx/x + du = 0$. Integramos:

$$\ln|x| + u = C.$$

Restituimos y:

$$x \ln|x| + y = Cx \Leftrightarrow \; y = x(C - \ln|x|),$$

que es la solución general.

2°) La ecuación $|x| - y + xy' = 0$ puede ser integrada haciendo aparecer también el argumento y/x; o sea:

$$\frac{|x|}{x} - \frac{y}{x} + y' = 0.$$

Hacemos $y/x = u$; es $y' = u + xu'$. Nos queda

$$\frac{|x|}{x} + xu' = 0; \quad u' = -\frac{|x|}{x}\frac{1}{x}.$$

Integramos (recuérdese lo dicho en el capítulo 1):

$$u = -\frac{|x|}{x}\ln|x| + C.$$

Luego es

$$y = -|x| \ln|x| + Cx.$$

Podemos comprobar que esta es solución general de la ecuación, pues derivando tendremos

$$y' = -\frac{|x|}{x}\ln|x| - \frac{|x|}{x} + C.$$

Estas expresiones de y e y', sustituidas en la ecuación dada, hacen idénticamente nulo el primer miembro.

3°) Hallar la curva integral de la ecuación $y(x + y)\,dx - x^2\,dy = 0$ que pasa por el punto (1.1).

En cuestiones como esta tendríamos que saber primero si la curva que nos piden existe y, caso de existir, si es única. Ello requiere demostrar el importante teorema de existencia y unicidad, cosa que hacemos después de considerar estas ecuaciones de la forma $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$.

Con todo, trataremos de llegar a la curva pedida obteniendo la solución general de la ecuación y determinando el valor de la constante a partir de la condición inicial.

La ecuación es homogénea de grado 2, de modo que dividiendo por x^2 y haciendo $y/x = u$, obtenemos

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{u^2} = 0,$$

cuya integral es $\ln|x| + 1/u = C$. Restituyendo la y queda:

$$y = \frac{x}{C - \ln|x|},$$

que es la solución general. Como la curva integral ha de pasar por el punto (1.1), deberá verificarse $1 = 1/C$; o sea, $C = 1$. La curva será:

$$y = \frac{x}{1 - \ln|x|},$$

que no está definida en $x = \pm e$. Cuando $x \to 0$, $y \to 0$.

4°) La ecuación

$$(5\sqrt{x} + \sqrt{10y})\,dx + 5\sqrt{x}\,dy = 0$$

es homogénea de grado 1/2. Dividiendo por $\sqrt{x}$, haciendo $y/x = u$ y conservando la variable x, nos queda

$$\frac{dx}{x} + \frac{5du}{5u + \sqrt{10u} + 5} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\ln|x| + \int \frac{5du}{5u + \sqrt{10u} + 5} = C.$$

La integral indicada se resuelve haciendo $10u = t^2$. Restituyendo la y tendremos, después de agrupar los logaritmos y simplificar:

$$\ln\left|5(x+y) + \sqrt{10xy}\right| - \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{\frac{10y}{x}}\right) = C.$$

1.3. Ecuaciones reducibles a homogéneas

Las ecuaciones de la forma

$$(ax + by + c)\,dx + (px + qy + r)\,dy = 0,$$

cuando el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$$

es distinto de cero, pueden ser reducidas a otras que son homogéneas, pues entonces el sistema de carácter finito no homogéneo

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ px + qy + r = 0 \end{cases}$$

tiene solución única: $x = \alpha$, $y = \beta$. Es decir, las rectas expresadas por las dos ecuaciones del sistema anterior se cortan en un punto propio (α, β). Cambiamos las variables x, y por otras u, v mediante la transformación

$$\begin{cases} x = u + \alpha \\ y = v + \beta \end{cases}$$

Tenemos:

$$(au + a\alpha + bv + b\beta + c)\,du + (pu + p\alpha + qv + q\beta + r)\,dv = 0;$$

pero

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ p\alpha + q\beta + r = 0 \end{cases},$$

por ser (α, β) la solución del sistema lineal.

Nos queda, pues:

$$(au + bv)\,du + (pu + qv)\,dv = 0,$$

que es una ecuación homogénea de grado 1, y se integra como hemos visto en el apartado anterior. Después se restituye las variables x, y.

Si es nulo el determinante Δ, las dos rectas del sistema o son paralelas o coinciden. Si son paralelas, será $p = ka,\ q = kb,\ r \neq kc$.

En tal caso hacemos el cambio $ax + by = u$, que transforma la ecuación en otra de variables separables, pues tenemos sucesivamente:

$$dy = \frac{du - a\,dx}{b};\ px + qy = k(ax + by) = ku;$$

$$b(u + c)\,dx + (ku + r)\,(du - adx) = 0;$$

$$[b(u + c) - a(ku + r)]\,dx + (ku + r)\,du = 0;$$

$$dx + \frac{ku + r}{(b - ka)u + bc - ar}\,du = 0;$$

donde ya están separadas las variables.

Si las rectas del sistema coinciden, o sea, si es

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c} = k,$$

la ecuación se reduce a $dx + k\,dy = 0$.

Ejemplos:

1°) La ecuación

$$y' = \frac{8 - 2x - 3y}{5 + 3x - 4y}$$

puede escribirse así:

$$(2x + 3y - 8)\,dx + (3x - 4y + 5)\,dy = 0.$$

No es nulo el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

El sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - 4y + 5 = 0 \end{cases}$$

tiene solución única:

$$x = \alpha = 1, \quad y = \beta = 2.$$

Hacemos

$$\begin{cases} x = u + 1 \\ y = v + 2 \end{cases}$$

La ecuación queda reducida a la homogénea

$$(2u + 3v)\,du + (3u - 4v)\,dv = 0.$$

Dividimos por u, hacemos $v/u = t$ y conservamos la variable u. Resulta:

$$\frac{du}{u} + \frac{4t - 3}{4t^2 - 6t - 2}\,dt = 0,$$

cuya integral es

$$\ln|u| + \frac{1}{2}\ln|2t^2 - 3t - 1| = \ln\sqrt{C} \Rightarrow u^2(2t^2 - 3t - 1) = C.$$

Restituyendo las variables primitivas, queda:

$$x^2 + 3xy - 2y^2 - 8x + 5y - 1 = C.$$

Se trata de una familia uniparamétrica de hipérbolas (al valor $C = 0$ le corresponde un par de rectas reales que se cortan).

2°) En la ecuación

$$(x + 3y + 3)\,dx + (2x + 6y + 5)\,dy = 0,$$

el determinante Δ es nulo, y las rectas del sistema son paralelas. Hacemos, pues,

$$x + 3y = u; \quad dy = \frac{1}{3}(du - dx).$$

Nos queda:

$$dx + \frac{2u+5}{u+4}\,du = 0.$$

Integrando y restituyendo la variable y resulta:

$$3x + 6y - \ln|(x+3y+4)^3| = C,$$

que es la solución general.

Una ecuación de la forma

$$(ax + by + c)\,dx + dy = 0$$

se reduce a otra de variables separables haciendo

$$ax + by + c = u \Rightarrow\ dy = \frac{1}{b}(du - a\,dx).$$

Nos queda, en efecto,

$$dx + \frac{du}{bu - a} = 0.$$

Se integra y se restituye las variables x e y.

* * *

Volvamos a recordar que la solución general de una ecuación homogénea

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

se obtiene haciendo

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow\ y' = u + x\frac{du}{dx};$$

de modo que sustituyendo tenemos:

$$u + x\frac{du}{dx} = F(u),$$

y separando las variables nos queda:

$$\frac{dx}{x} - \frac{du}{G(u)} = 0.$$

Si al integrar ponemos la constante en forma de logaritmo, resulta:

$$\ln\frac{x}{C} = \int \frac{du}{G(u)},$$

de donde

$$x = C\,e^{\int \frac{du}{G(u)}} = C f(u).$$

Pasando a coordenadas polares (θ, ρ), teniendo en cuenta que es $u = y/x = \operatorname{tg}\theta$, será: $\rho\cos\theta = C\,g(\theta)$; es decir: $\rho = C\,h(\theta)$. De aquí se deduce que las curvas integrales de una ecuación homogénea

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

son homotéticas respecto del origen.

1.4. Diferenciales exactas

En lo que sigue consideraremos ecuaciones

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0,$$

donde P y Q son funciones continuas con derivadas parciales primeras continuas en un dominio D del espacio euclídeo E^2. Es decir, P y Q son funciones de clase 1 en D. El símbolo de esta clase es C^1. Decimos, pues: $P, Q \in C^1$ en $D \subseteq E^2$.

Puede suceder que el primer miembro de una ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

sea diferencial total de una cierta función $\varphi(x,y)$, cosa que ocurre cuando es $P = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ y $Q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$. Supongamos que se da este caso. Entonces, como las derivadas primeras de φ son funciones de clase 1 en D (pues lo son P y Q), existirán y serán continuas en D las derivadas segundas de φ; es decir, φ será de clase 2. Derivemos P respecto de y y Q respecto de x, y tendremos:

$$P_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}, \quad Q_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Como φ es de clase 2, serán iguales las derivadas segundas mixtas de φ y, por lo tanto, será $P_y = Q_x$. A estas derivadas P_y y Q_x se les llama *cruzadas*.

Hemos llegado así a lo siguiente: *Si $P\,dx + Q\,dy$ es diferencial exacta, las derivadas cruzadas de P y Q son iguales.*

Recíprocamente: *si es $P_y = Q_x$ en D, la expresión $P\,dx + Q\,dy$ es diferencial exacta.* Se da una demostración constructiva de esta proposición recíproca del siguiente modo: Tratamos de encontrar una función $\varphi(x,y)$ de clase 2 en D tal que sea $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ y $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$, partiendo para ello de nuestra hipótesis: $P_y = Q_x$ en el dominio D donde P y Q son de clase 1.

Sea un punto $(x_0, y_0) \in D$. Si fuera $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, integrando entre x_0 y x tendríamos:

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) = \int_{x_0}^{x} P(\sigma, y)\,d\sigma. \tag{1.4a}$$

Si además fuera $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$, tendría que ser:

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} P(\sigma,y)\,d\sigma\right] = \varphi_y(x_0,y) + \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(\sigma,y)\,d\sigma.$$

y como $P \in C^1$, derivamos bajo el signo integral, es decir:

$$Q(x,y) = \varphi_y(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} P_y(\sigma,y)\,d\sigma.$$

Como, por hipótesis, es $P_y = Q_\sigma$, será:

$$Q(x,y) = \varphi_y(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} Q_\sigma(\sigma,y)\,d\sigma = \varphi_y(x_0,y) + Q(x,y) - Q(x_0,y),$$

lo cual implica:

$$\varphi_y(x_0,y) = Q(x_0,y).$$

Integrando esto entre y_0 e y queda:

$$\varphi(x_0,y) = \varphi(x_0,y_0) + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds,$$

que sustituido en (1.4a) nos da:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds, + \int_{x_0}^{x} P(\sigma,y)\,d\sigma. \qquad (1.4b)$$

Veamos si esta función $\varphi(x,y)$ así construida, cuyo valor en (x_0,y_0) ha de ser conocido, cumple los requisitos exigidos al principio. En primer lugar es obvio que φ es de clase 2, con lo cual $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$. En segundo lugar, derivando (1.4b) respecto de x y respecto de y, tenemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P(x,y); \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} P_y(\sigma,y)\,d\sigma.$$

Con la primera igualdad se cumple otro de los requisitos previos. En la integral de la segunda igualdad podemos sustituir $P_y(\sigma,y)$ por $Q_\sigma(\sigma,y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= Q(x_0,y) + \int_{x_0}^{x} Q_\sigma(\sigma,y)\,d\sigma = \\ &= Q(x_0,y) + Q(x,y) - Q(x_0,y) = Q(x,y), \end{aligned}$$

y queda satisfecha la última condición previa. Por lo tanto,

$$P\,dx + Q\,dy = d\varphi,$$

c.q.d.

Así, pues: *Una condición necesaria y suficiente para que $P\,dx + Q\,dy$ sea diferencial exacta es que sean iguales las derivadas cruzadas de P y Q.*

Queremos advertir que al derivar (1.4b) tanto respecto de x como de y hemos utilizado la fórmula conocida:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(t)\,dt = \beta'(x)\,g(\beta(x)) - \alpha'(x)\,g(\alpha(x)),$$

donde los límites de la integral son funciones derivables de la misma variable respecto de la cual se va a efectuar la derivación.

De todo lo dicho se deduce: *si una ecuación* $P\,dx+Q\,dy=0$ *es diferencial exacta, la solución que pasa por el punto* $(x_0, y_0) \in D$ *viene dada implícitamente por*

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0),$$

donde φ *es la función (1.4b); o bien, por*

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0, s)\,ds + \int_{x_0}^{x} P(\sigma, y)\,d\sigma = 0.$$

La solución general será $\varphi(x, y) = C$, donde C es una constante arbitraria. La función φ, de la cual es diferencial exacta $P\,dx + Q\,dy$, recibe el nombre de *potencial*. En realidad, es el potencial del campo o función vectorial $P\vec{i} + Q\vec{j}$.

Una vez comprobado que el primer miembro de una ecuación $P\,dx + Q\,dy = 0$ es diferencial exacta (por la igualdad de las dervadas cruzadas), el método operativo para hallar el potencial φ sin partir del valor de φ en un punto (x_0, y_0) es análogo al descrito en la proposición recíproca anterior. Partimos de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q.$$

Integramos cualquiera de estas igualdades respecto de la variable que figura en la derivada parcial de φ. Por ejemplo, integramos $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ respecto de x:

$$\varphi = \int P(x, y)\,dx = F(x, y) + f(y),$$

donde F es una primitiva de P y $f(y)$ una función *arbitraria* de y. Si derivamos ahora φ respecto de y tendremos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) + f'(y) = G(x, y) + f'(y).$$

Este resultado ha de ser idéntico a $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$; igualamos y despejamos $f'(y)$:

$$f'(y) = Q(x, y) - G(x, y),$$

cuyo segundo miembro será función exclusivamente de y. Integrando obtendremos $f(y)$, salvo la constante de integración. Lo sustituiremos en

$$\varphi = F(x, y) + f(y).$$

Entonces, la solución general de $P\,dx + Q\,dy = 0$ será $\varphi = C$.

Ejemplos:

1°) Integrar

$$(e^{x+y} - \cos x)\,dx + (e^{x+y} - \operatorname{sen} y)\,dy = 0.$$

Las derivadas cruzadas son iguales, luego el primer miembro es diferencial exacta y, por lo tanto, existe φ. Ha de ser:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{x+y} - \cos x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y} - \operatorname{sen} y.$$

Integramos respecto a x la primera identidad:

$$\varphi = e^{x+y} + \operatorname{sen} x + f(y).$$

Derivemos respecto a y :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^{x+y} + f'(y),$$

que ha de ser igual a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q = e^{x+y} - \operatorname{sen} y.$$

Por lo tanto, $f'(y) = -\operatorname{sen} y$. Integrando, $f(y) = \cos y + k_1$; sustituyendo esta expresión de $f(y)$ en la de φ obtenida antes, queda:

$$\varphi = e^{x+y} + \operatorname{sen} x + \cos y + k_1.$$

La solución general de la ecuación dada es $\varphi = k_2$. O sea:

$$e^{x+y} + \operatorname{sen} x + \cos y = C.$$

2°) Hallar la solución particular de la ecuación

$$\left(2x + y - \frac{1}{x+y}\right) dx + \left(x - \frac{1}{x+y}\right) dy = 0$$

que satisface a la condición $y(1) = 0$.

Aquí, el dominio D en el cual P y Q son de clase 1 es todo el plano euclídeo excluyendo la recta $x + y = 0$. El punto $(1, 0)$ al que se refiere la condición pertenece a D. Las derivadas cruzadas son iguales a

$$1 + \frac{1}{(x+y)^2}$$

en D. El primer miembro de la ecuación es, pues, diferencial total de un potencial φ. Vamos a hallar φ sin particularizar para $(x_0, y_0) = (1, 0)$, y después determinaremos la constante. De las identidades

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x + y - \frac{1}{x+y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - \frac{1}{x+y},$$

integremos la primera respecto de x:

$$\varphi = x^2 + xy - \ln|x+y| + f(y).$$

Derivemos respecto de y e igualemos el resultado a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q = x - \frac{1}{x+y}:$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - \frac{1}{x+y} + f'(y) = x - \frac{1}{x+y},$$

lo cual implica

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = k.$$

Llevando esto a la expresión de φ obtenida anteriormente, queda:

$$\varphi = x(x+y) - \ln|x+y| + k.$$

La solución general de la ecuación dada será

$$x(x+y) - \ln|x+y| = C.$$

Ha de satisfacerse la condición inicial $y(1) = 0$, lo cual equivale a obtener la curva integral que pasa por el punto $(1, 0)$. Sustituyendo estos valores en la solución general, resulta $C = 1$. La solución particular pedida será, pues:

$$x(x+y) - \ln|x+y| = 1.$$

1.5. Factor integrante

Si el primer miembro de una ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

no es diferencial exacta es posible, a veces, encontrar una función $\mu(x,y)$ que multiplicada por $P\,dx + Q\,dy$ produce una diferencial exacta. Se dice entonces que $\mu(x,y)$ es un *factor integrante*.

La misma existencia de la solución general de

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

conduce a la existencia de un factor integrante. En efecto, sea $F(x,y,C) = 0$ la solución general; es decir, $f(x,y) = C$. Derivando respecto de x será:

$$f_x + f_y y' = 0; \quad y' = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Pero en la propia ecuación, dividiendo por dx, tenemos: $y' = -P/Q$. Por lo tanto,

$$\frac{f_x}{P} = \frac{f_y}{Q} = \mu(x,y);$$

o sea,

$$f_x = \mu P, \quad f_y = \mu Q.$$

Y como $f_x dx + f_y dy$ es diferencial total de $f(x,y)$, también lo será

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy,$$

donde μ es factor integrante.

Si hemos encontrado un factor integrante μ de una ecuación $P\,dx + Q\,dy = 0$, podemos obtener infinitos otros. Partimos para ello de

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = df.$$

Elijamos una función integrable cualquiera $g(f)$, y multipliquemos por ella la identidad anterior. Tendremos:

$$\mu g(f) P\,dx + \mu g(f) Q\,dy = g(f)df.$$

Como $g(f)$ es integrable, el segundo miembro es la diferencial de una cierta función

$$G[f(x,y)] = H(x,y);$$

es decir, el primer miembro es la diferencial total de $H(x,y)$, y en él aparece como factor integrante $\mu g(f)$.

Del mismo modo, si μ es factor integrante de $P\,dx + Q\,dy = 0$; o sea, si es

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = df,$$

y existe otro factor ν, éste ha de ser de la forma

$$\nu = \mu g[f(x,y)].$$

En efecto, será:

$$\nu P\,dx + \nu Q\,dy = dh(x,y).$$

Dividiendo esta identidad por la de df tendremos:

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{dh}{df}.$$

Por otra parte, veamos si hay alguna dependencia funcional entre h y f :

$$\frac{\partial(h,f)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \nu P & \nu Q \\ \mu P & \mu Q \end{vmatrix} = 0.$$

Hay dependencia funcional, puesto que el jacobiano es idénticamente nulo. Luego $h = G(f)$. Entonces, la derivada de h respecto de f será:

$$\frac{dh}{df} = G'(f).$$

Y como era $\nu/\mu = dh/df$, tendremos:

$$\nu = \mu G'(f) = \mu g[f(x,y)],$$

c.q.d.

Si dos factores integrantes ν, μ de $P\,dx + Q\,dy = 0$ son tales que su cociente no es una constante, la solución general de la ecuación es $\nu/\mu = C$.

* * *

El problema de encontrar un factor integrante no suele ser fácil, a menos que sepamos con certeza que tal factor es de un tipo determinado; por ejemplo, que es función de un argumento conocido

$$g(x, y) = \frac{x+y}{xy};$$

es decir, el factor integrante sería de la forma

$$\mu\left(\frac{x+y}{xy}\right), \quad \text{etc.}$$

Podemos saber también con facilidad si μ es sólo función de x, o sólo función de y; de ser así podemos hallar un $\mu(x)$, ó $\mu(y)$.

Pero el problema general reside en obtener, al menos, una solución particular de una ecuación en derivadas parciales. Efectivamente, si μ es factor integrante de la ecuación $P\,dx + Q\,dy = 0$, multiplicando ambos miembros por μ será:

$$\mu P\,dx + \mu Q\,dy = 0.$$

El primer miembro es ahora diferencial exacta y, por lo tanto, han de ser iguales las derivadas cruzadas. O sea:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Haciendo las derivaciones indicadas y empleando los símbolos P_y, Q_x para las derivadas cruzadas de P y Q (que no serán iguales), nos queda:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(P_y - Q_x). \tag{1.5a}$$

Es ésta una ecuación en derivadas parciales, lineal y de primer orden, cuya función desconocida es $\mu(x, y)$. En el capítulo 4 de este libro estudiamos estas ecuaciones, y hay una referencia concreta a los factores integrantes. Con todo, tampoco suele ser sencillo obtener una solución μ de (1.5a).

Consideremos, sin embargo, algunos casos. Supongamos que μ es función de un solo argumento previamente conocido $s = g(x, y)$, con $g \in C^1$ en D. O sea, que μ es función de s (s, conocido). Tendremos:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial x} = \mu' s_x; \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{ds}\frac{\partial s}{\partial y} = \mu' s_y.$$

Sustituyendo esto en la ecuación (1.5a), nos queda:

$$\mu'(Q s_x - P s_y) = \mu(P_y - Q_x),$$

de donde

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Qs_x - Ps_y}. \tag{1.5b}$$

Ahora bien, como μ es funcion sólo del argumento s, también lo es

$$\mu' = \frac{d\mu}{ds}.$$

Por lo tanto, el segundo miembro tiene que poder expresarse en función sólo de s. Entonces,

$$\frac{P_y - Q_x}{Qs_x - Ps_y} = h(s),$$

donde la función h es ya perfectamente conocida. Nos queda:

$$\frac{\mu'}{\mu} = h(s) \Rightarrow \mu = \exp \int h(s)\, ds.$$

Si μ depende sólo de x, será $s = x$. La igualdad (1.5b) queda así:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Este segundo miembro será función sólo de x. De manera que para saber si el factor μ depende sólo de x bastará conprobar si a

$$\frac{P_y - Q_x}{Q}$$

le ocurre lo mismo. Y si, efectivamente, es así podrá integrarse inmediatamente para obtener $\mu(x)$.

De la misma manera, si μ sólo depende de y, será $s = y$. La igualdad (1.5b) se reduce a

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{-p},$$

donde el segundo miembro es sólo función de y.

Ejemplos:

1°)Averiguar si la ecuación

$$\left(\frac{3}{y} - e^{-x}\right) dx - \frac{xe^{-x}}{y}\, dy = 0$$

admite un factor integrante de la forma $\mu(ye^x)$, y en caso afirmativo hallarlo e integrar la ecuación.

Aquí el argumento único es $s = g(x, y) = ye^x$. Tenemos también:

$$P = \frac{3}{y} - e^{-x};\ Q = -\frac{xe^{-x}}{y};\ P_y - Q_x = \frac{1}{y^2}(ye^{-x} - xye^{-x} - 3);\ s_x = ye^x;\ s_y = e^x.$$

Todas estas expresiones las llevamos al segundo miembro de (1.5b) y tenemos, operando sumariamente:

$$\frac{P_y - Q_x}{Qs_x - Ps_y} = \frac{ye^{-x} - xye^{-x} - 3}{y^2 - xy^2 - 3ye^x}.$$

Poniendo $e^{-x} = 1/e^x$ y operando de nuevo llegamos a:

$$\frac{y - xy - 3e^x}{y^2e^x - xy^2e^x - 3ye^{2x}} = \frac{y - xy - 3e^x}{ye^x(y - xy - 3e^x)} = \frac{1}{ye^x} = \frac{1}{s}.$$

Vemos, pues, que el segundo miembro de (1.5b) puede expresarse en función sólo del argumento $s = ye^x$. Por lo tanto, $\mu'/\mu = 1/s$. Integrando, queda:

$$\ln|\mu| = \ln|s| \Rightarrow\ \mu = s = ye^x$$

(hemos dado el valor cero a la constante de integración).

Multiplicando la ecuación del enunciado por este factor integrante $\mu = ye^x$, tenemos:

$$(3e^x - y)\,dx - x\,dy = 0,$$

cuyo primer miembro es diferencial exacta. Existe potencial $\varphi(x, y)$. Para hallarlo, partimos de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3e^x - y, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -x.$$

Integramos esta última identidad respecto de y:

$$\varphi = -xy + f(x).$$

Derivamos φ respecto de x e igualamos el resultado a $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3e^x - y$. Será:

$$-y + f'(x) = 3e^x - y \Rightarrow\ f'(x) = 3e^x.$$

Luego $f(x) = 3e^x + k$. Llevamos esta expresión a la de φ obtenida antes:

$$\varphi(x, y) = 3e^x - xy + k.$$

La solución general de la ecuación será $\varphi(x, y) = k_1$, es decir:

$$3e^x - xy = C.$$

2°)Si la ecuación

$$\frac{1}{2}y^2(1 + x\,\mathrm{tg}\,x)\,dx + (xy + \cos x)\,dy = 0$$

admite un factor integrante dependiente sólo de x o de y, hallarlo e integrar la ecuación.

Tenemos:

$$P = \frac{1}{2}y^2(1 + x\,\mathrm{tg}\,x),\ Q = xy + \cos x;$$

$$P_y - Q_x = xy\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{sen}\,x.$$

Para que haya un factor integrante que sea función sólo de x, el cociente

$$\frac{P_y - Q_x}{Q}$$

debe poder expresarse en función sólo de x. En nuestro caso, el cociente referido es:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{xy\,\mathrm{tg}\,x + \mathrm{sen}\,x}{xy + \cos x} = \frac{xy\,\mathrm{sen}\,x + \mathrm{sen}\,x\cos x}{(xy + \cos x)\cos x} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} = \mathrm{tg}\,x.$$

Existe, pues, $\mu(x)$. Lo obtenemos de $\mu'/\mu = \mathrm{tg}\,x$. Integrando, dando el valor cero a la constante, es: $\mu = 1/\cos x$. Multiplicando la ecuación por μ, nos queda:

$$\left(\frac{y^2}{2\cos x} + \frac{xy^2\,\mathrm{sen}\,x}{2\cos^2 x}\right)dx + \left(1 + \frac{xy}{\cos x}\right)dy = 0,$$

que por ser diferencial total podemos hallar φ sin dificultad. La solución general es:

$$y + \frac{xy^2}{2\cos x} = C.$$

* * *

En el apartado 1.2. estudiábamos las ecuaciones homogéneas. Vamos a ver ahora que toda ecuación homogénea

$$P\left(\frac{y}{x}\right)dx + Q\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

admite el factor integrante

$$\mu = \frac{1}{xP + yQ}.$$

Para ello, veamos primero si una tal ecuación admite un factor integrante que sea función sólo del argumento $s = xP + yQ$. Utilizamos el segundo miembro de la igualdad (1.5b), porque si efectivamente existe

$$\mu(s) = \mu(xP + yQ),$$

la fracción

$$\frac{P_y - Q_x}{Qs_x - Ps_y}$$

ha de poder ser expresada en función sólo de $s = xP + yQ$. Si llamamos $y/x = t$, tendremos:

$$P_y = P'(t)\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{x}P';$$

$$Q_x = Q'(t)\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}Q'.$$

Por otra parte, las derivadas s_x, s_y del argumento $s = xP + yQ$ son:

$$s_x = P - \left(\frac{y}{x}\right)^2 Q' - \frac{y}{x}P';$$

$$s_y = P' + Q + \frac{y}{x}Q'.$$

Llevando todo esto a la fracción (1.5b), operando y simplificando, obtenemos:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{s_x Q - s_y P} = -\frac{1}{xP + yQ} = -\frac{1}{s}.$$

Por lo tanto,

$$\ln|\mu| = -\ln|s| + 0 \Rightarrow \mu = \frac{1}{xP + yQ},$$

c.q.d.

Como ejemplo, resolvamos el ejercicio 3°) del apartado 1.2. utilizando este factor integrante de las ecuaciones homogéneas. Se trata de *hallar la curva integral de la ecuación*

$$y(x + y)\,dx - x^2\,dy = 0$$

que pasa por el punto (1,1). Se comprende que da lo mismo operar con P y Q tal como están en la ecuación que expresarlos en función de y/x. Haremos lo primero. El factor integrante es

$$\mu = \frac{1}{xP + yQ} = \frac{1}{xy^2}.$$

De manera que tendremos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q = -\frac{x}{y^2}.$$

Integrando la primera respecto de x, resulta

$$\varphi = \frac{x}{y} + \ln|x| + f(y).$$

Derivando esto respecto de y e igualando a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

nos queda:

$$f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = k.$$

Por lo tanto, será

$$\varphi = \frac{x}{y} + \ln|x| + k.$$

La solución general de la ecuación es:

$$\frac{x}{y} + \ln|x| = C.$$

Se debe cumplir la condición inicial $y(1) = 1$, que nos da para C el valor 1. Así, pues, la solución particular pedida es:

$$\frac{x}{y} + \ln|x| = 1,$$

que es la misma que obtuvimos en 1.2.

2. Existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Antes de demostrar este importante teorema, es conveniente recordar algunos conceptos fundamentales que van a ser utilizados en la demostración.

2.1. Espacios métricos

Sea E un conjunto no vacío, a cuyos elementos $x_1, x_2, \ldots$ les vamos a llamar *puntos*. Por otra parte, construyamos una función real, unívoca y no negativa $d(x, y)$ de dos variables independientes de tal manera que esté definida para todo par de puntos de E; es decir, que si $x = x_p$, $y = x_q$ pertenecen a E, ha de ser $d(x_p, x_q)$ un número real no negativo. Además, la función $d(x, y)$ ha de cumplir las condiciones siguientes:

1ª) $d(x, y) = 0$ sólo si es $x = y$.

2ª) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \quad \forall x, y, z \in E.$

Como consecuencia de ello se verifica $d(x, y) = d(y, x)$.

A toda función d que cumpla los requisitos anteriores se le llama *distancia*, y si se le aplica a dos elementos cualesquiera x_p, x_q del conjunto E tendremos la distancia entre dos puntos de E, que será un número $r \in \mathbb{R}^+$.

El conjunto E, provisto de una distancia d, es un *espacio métrico* M. Lo escribiremos así: $M = (E, d)$.

El conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales, provisto de la función $d(x, y) = |x - y|$, es un espacio métrico, porque $|x - y|$ es real, unívoca y no negativa, está definida para todo par de números reales $x = \alpha$, $y = \beta$, es cero sólo cuando $x = y$, y verifica la propiedad triangular:

$$|x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

cuya comprobación es inmediata haciendo

$$x - z = a + b, \; x - y = a,$$

con lo cual es $y - z = b$, y aplicando

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Por lo tanto, la función $|x - y|$ es una distancia.

Un conjunto E de puntos puede ser metrizable de diferentes maneras; es decir, pueden ser establecidas distancias diferentes definidas en E.

Consideremos ahora el conjunto de todas las funciones reales continuas en un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. El símbolo de dicho conjunto es $C([a,b])$. Si $f(x), g(x)$ son dos funciones cualesquiera pertenecientes a $C([a,b])$, podemos definir una distancia entre ellas del siguiente modo:

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Cumple todas las condiciones exigidas a un distancia, porque:

1º) Es una función real no negativa, por serlo $|f-g|$.

2º) Está definida para todo par de funciones de $C([a,b])$.

3º) Si es $f = g$ en $[a,b]$, es claro que $d(f,g) = 0$ sólo en este supuesto.

4º) Para todo $x \in [a,b]$ se verifica:

$$|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|,$$

lo cual implica que para todo x de $[a,b]$ es

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)|;$$

y por lo tanto:

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x) - h(x)| + \max_{x\in[a,b]} |h(x) - g(x)|.$$

Así, pues, el conjunto $C([a,b])$ con la métrica del máximo es un espacio métrico.

2.2. Condición de Lipschitz

Sea $f(x)$ una función definida en $I \subset \mathbb{R}$. Supongamos que existe un número K tal que para todo par de valores x_p, x_q de x, pertenecientes a I, se verifica:

$$|f(x_p) - f(x_q)| \leqslant K|x_p - x_q|.$$

Se dice entonces que $f(x)$ cumple la condición de Lipschitz, o que $f(x)$ es lipschiciana en I. El número K es, evidentemente, positivo.

Si una función $f(x)$ es lipschiciana en I, es uniformemente continua en I. Como sabemos, la condición de continuidad uniforme es que a cada $\epsilon > 0$ le corresponda un $\delta > 0$ tal que para todo par de valores $x_p, x_q \in I$ se verifique $|f(x_p) - f(x_q)| \leqslant \epsilon$ cuando

$$|x_p - x_q| \leqslant \delta.$$

Si $f(x)$ es lipschiciana con constante K, a cada $\epsilon < 0$ le hacemos corresponder $\delta = \epsilon/K$. Entonces, la desigualdad $|x_p - x_q| \leqslant \epsilon/K$ equivale a $K|x_p - x_q| \leqslant \epsilon$; y por la condición de Lipschitz será

$$|f(x_p) - f(x_q)| \leqslant \epsilon.$$

La condición de Lipschitz puede escribirse así:

$$\left|\frac{f(x_p)-f(x_q)}{x_p-x_q}\right| \leqslant K,$$

lo cual expresa que la variación media de $f(x)$ está acotada.

2.3. Sucesiones en un espacio métrico

Veamos antes algunas definiciones.

Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico, a cuyos elementos o *puntos* les anotaremos $x_0, x_1, x_2, \ldots$ Llamamos *bola abierta* en M al conjunto de los puntos $x \in M$ cuya distancia a uno dado x_0 es menor que r. Escribiremos, pues:

$$B(x_0, r) = \{x \in M / d(x_0, x) < r\}.$$

Si con el mismo centro x_0 de la bola y el mismo radio r se verifica $d(x_0, x) \leqslant r$, la bola es *cerrada*, y la representaremos por $B[x_0, r]$. Una bola abierta de centro x_0 y radio ε recibe el nombre de *entorno* de x_0. Lo anotaremos simplemente así: $0(x_0)$.

Sea A un subconjunto del espacio métrico M. Se dice que x_a es un *punto de adherencia* de A si todo entorno de x_a contiene al menos un punto de A. Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A se le llama *adherencia* de A, o *clausura* de A, que se representa por $\bar{A}$. Es evidente que $A \subset \bar{A}$, puesto que si $x \in A$, todo entorno de x contiene un punto de A, que es el propio x; luego x es punto de adherencia de A y, por tanto, pertenecerá a $\bar{A}$.

Decimos que un subconjunto A del espacio métrico es *cerrado* cuando A e igual a su clausura ($A = \bar{A}$).

Se dice que un punto x es *interior* del subconjunto A cuando existe un entorno de x que está contenido integrantemente en A.

Si en un subconjunto P de un espacio métrico M todos los puntos de P son interiores, se dice que P es un *abierto*.

Todos estos conceptos abstractos son fácilmente intuibles con la geometría familiar del plano o del espacio euclídeos. Por ejemplo, los puntos x_c de una circunferencia no son interiores al círculo correspondiente, porque no hay ningún entorno de x_c (círculo de centro x_c y radio ϵ, suprimida su circunferencia) que esté contenido íntegramente en el referido círculo. Si en un círculo suprimimos su circunferencia, tendremos un abierto, pues los puntos que quedan son todos interiores. Un círculo es un conjunto cerrado (es igual a su adherencia); etc.

* * *

Sea $x_1, x_2, \ldots$ una sucesión de *puntos* del espacio métrico $M = (E, d)$. Decimos que esta sucesión converge al punto x si todo entorno de x contiene a todos los puntos

de la sucesión a partir de uno de ellos. O sea, si a cada $\epsilon > 0$ el entorno o bola abierta $0(x, \epsilon)$ contiene a todos los puntos de la sucesión a partir de uno x_m. Dicho de otra manera: *la sucesión* $\{x_n\}$ *converge a* x *si*

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = 0.$$

Entonces, el punto x *es el límite de la sucesión* $\{x_n\}$, *y obviamente es único.*

Recuérdese que estamos hablando de espacios métricos, a cuyos elementos llamamos *puntos*. Pero estos puntos no lo son necesariamente en el sentido de la geometría familiar. Pueden ser funciones, sucesiones, matrices, etc. Las definiciones anteriores tienen sentido si se establece una *distancia* en cada caso.

Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de M. *Se dice que* $\{x_n\}$ *es una sucesión de Cauchy cuando eligiendo un* $\epsilon > 0$ *podemos hallar un número* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para cualquier pareja de números naturales* n', n'' *mayores que* m *se verifica*

$$d(x_{n'}, x_{n''}) < \epsilon.$$

Una sucesión de Cauchy puede no ser convergente; pero toda sucesión convergente es de Cauchy. Efectivamente, si la sucesión $\{x_n\}$ converge a x, para cada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un índice m tal que para todo $n > m$ la distancia $d(x, x_n)$ sea menor que $\epsilon/2$. Si n' y n'' son dos índices cualesquiera mayores que m, apliquemos la propiedad triangular:

$$d(x_{n'}, x_{n''}) \leqslant d(x_{n'}, x) + d(x, x_{n''}).$$

Como cada distancia del segundo miembro es menor que $\epsilon/2$, nos queda:

$$d(x_{n'}, x_{n''}) < \epsilon, \quad \forall n', n'' > m,$$

que es la condición de Cauchy.

Una condición necesaria, pero no suficiente, para que una sucesión en un espacio métrico converja es que sea de Cauchy.

2.4. Espacios métricos completos.

Un espacio métrico $M = (E, d)$ *es completo si toda sucesión de Cauchy de puntos de* M *es convergente en* M.

La recta real es un espacio métrico completo, porque toda sucesión de Cauchy de números reales converge a un número real. En cambio, no toda sucesión de Cauchy de números racionales converge a un número racional, por lo cual el espacio métrico Q no es completo.

Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico *completo*, y consideremos un subconjunto *cerrado* $A \subset E$. Entonces, el subespacio $M_1 = (A, d)$ es también completo. Efectivamente, toda sucesión de Cauchy $\{x_n\}$ de M_1 lo es de M y, por lo tanto, converge a un

punto $x \in M$. Ahora bien, puesto que x es el límite de $\{x_n\}$, hay infinitos puntos de dicha sucesión en todo entorno de x; es decir, en todo entorno de $x \in M$ hay puntos $x_n \in A$; luego x es un punto de adherencia de A; o sea, $x \in \bar{A}$. Pero como A es cerrado, por hipótesis, será $\bar{A} = A$ (definición dada antes de conjunto cerrado). Así, pues, el límite x de $\{x_n\}$ pertenece también a A y, por lo tanto, al subespacio $M_1 = (A, d)$, con lo cual M_1 es completo.

El conjunto $C([a,b])$ provisto de la distancia

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$$

es un espacio métrico, como ya vimos antes. Pues bien, este espacio con la métrica del máximo es también completo.

En efecto: si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en dicho espacio métrico, a cada $\epsilon > 0$ le corresponde un índice m tal que $\forall n', n'' > m$ es

$$d(f_{n'}(x), f_{n''}(x)) < \epsilon.$$

Como esta distancia la hemos definido con el criterio del máximo, será:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_{n'}(x) - f_{n''}(x)| < \epsilon, \quad \forall n', n'' > m,$$

y por lo tanto:

$$|f_{n'}(x) - f_{n''}(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b] \quad \text{y} \quad \forall n', n'' > m.$$

Pero esta es la condición de convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(x)\}$. Su límite es una función continua $f(x)$. Haciendo tender n'' a infinito, nos queda:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [a,b] \text{ y } \forall n > m.$$

El espacio $C([a,b])$ con la métrica del máximo es, pues, completo.

2.5. Aplicaciones contractivas

Dados dos espacios métricos M y N, podemos establecer una aplicación cualquiera T de M en N. Si los elementos de M son $x_1, x_2, \ldots$, sus transformados por T en N serán

$$Tx_1 = y_1, \; Tx_2 = y_2, \ldots$$

Una aplicación o transformación T de M en N es *continua* si a toda la sucesión convergente $\{x_n\}$ de M le corresponde en N otra sucesión $\{Tx_n\}$ también convergente, pero de tal manera que si x es el límite de $\{x_n\}$, el límite de $\{Tx_n\}$ es Tx. O sea, cuando el transformado del límite de toda sucesión convergente de M es igual al límite de la sucesión transformada en N; es decir:

$$T(\lim\{x_n\}) = \lim\{Tx_n\}.$$

Pueden ser establecidas aplicaciones de un espacio métrico en sí mismo, y entre ellas las hay que son contractivas. Las transformaciones contractivas acortan las distancias. Vamos a definirlas.

Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico. Se dice que una aplicación T de M en M es contractiva cuando se verifica

$$d(Tx_p, Tx_q) \leqslant \alpha d(x_p, x_q),$$

para todo par de puntos $x_p, x_q \in M$, siendo α un número no negativo menor que la unidad.

Toda aplicación contractiva es continua. En efecto, si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente de M, y su límite es x, la distancia $d(x_n, x)$ puede hacerse tan pequeña como se quiera; y como es

$$d(Tx_n, Tx) \leqslant \alpha\, d(x_n, x),$$

también a $d(Tx_n, Tx)$ le pasa lo mismo. Por lo tanto, Tx es el límite de la sucesión $\{Tx_n\}$. O sea:

$$T(\lim\{x_n\}) = \lim\{Tx_n\},$$

que es la condición de continuidad de T.

Cuando un espacio métrico es completo, las aplicaciones contractivas en él tienen una importante propiedad. Esta propiedad es la que se enuncia en el llamado *teorema del punto fijo,* que es básico en la demostración de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales, los sistemas y las ecuaciones integrales.

Teorema del punto fijo:

Toda aplicación contractiva en un espacio métrico completo M deja invariable un punto, y sólo uno, de dicho espacio. Es decir, sólo hay un punto $x \in M$ cuyo transformado es él mismo. Dicho de otro modo: la ecuación $Tx = x$ tiene solución y es única (Banach).

Demostración:

Tomemos un punto cualquiera $x_0 \in M$, y formemos la siguiente sucesión:

$$x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \ldots, x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \ldots,$$

donde T es una aplicación contractiva de M en M. La sucesión así formada es de Cauchy. En efecto, sean dos índices $m \geqslant n$. En virtud de la ley de recurrencia establecida y de ser T contractiva, tenemos sucesivamente:

$$d(x_n, x_m) = d(Tx_{n-1}, Tx_{m-1}) \leqslant \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) = \alpha d(Tx_{n-2}, Tx_{m-2}) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) = \ldots = \alpha^{n-1} d(Tx_0, Tx_{m-n}) \leqslant \alpha^n d(x_0, x_{m-n}).$$

Si aplicamos reiteradamente a esta última distancia $d(x_0, x_{m-n})$ la propiedad triangular, intercalando los puntos

$$x_1, x_2, \ldots, x_{m-n-1},$$

tendremos:

$$d(x_n, x_m) \leqslant \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \leqslant \alpha^n [d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \ldots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n})].$$

Pero como

$$d(x_1, x_2) = d(Tx_0, Tx_1) \leqslant \alpha d(x_0, x_1),$$
$$d(x_2, x_3) = d(T^2 x_0, T^2 x_1) \leqslant \alpha^2 d(x_0, x_1), \text{ etc.},$$

nos quedará:

$$d(x_n, x_m) \leqslant \alpha^n d(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}).$$

Como es $0 \leqslant \alpha < 1$, la suma del último paréntesis es menor que la de la serie geométrica

$$\sum_0^\infty \alpha^k.$$

Así, pues:

$$d(x_n, x_m) < \alpha^n \, d(x_0, x_1) \frac{1}{1-\alpha}.$$

El segundo miembro puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo n suficientemente grande. Por lo tanto, la sucesión $\{x_n\} = \{T^n x_0\}$ es de Cauchy. Además es convergente por ser M un espacio métrico completo. Sea x su límite; es decir, $\lim\{x_n\} = x$, que también podemos expresarlo así:

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Ahora bien, la aplicación T es continua, puesto que es contractiva. Quiere ello decir que

$$Tx = T(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} Tx_n.$$

Pero es $Tx_n = x_{n+1}$. Nos queda:

$$Tx = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x.$$

Hemos demostrado, pues, que x es invariante; o sea, hemos probado la existencia del punto fijo.

Este punto fijo es único. Supongamos que hubiera otro y. Se verificaría $Ty = y$. La distancia entre ambos sería:

$$d(x, y) = d(Tx, Ty).$$

Además, por ser T contractiva, tendríamos:

$$d(Tx, Ty) = d(x, y) \leqslant \alpha d(x, y);$$

y como es $\alpha < 1$, la única posibilidad de que se verifique la última limitación es que sea $d(x, y) = 0$, lo cual implica necesariamente $x = y$.

Teorema de existencia y unicidad en la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

(Método de Picard)

Sea la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2.a}$$

con la condición

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.b}$$

Además, $f(x, y)$ cumple los siguientes requisitos:

1°) Es continua en un dominio D al cual pertenece el punto (x_0, y_0).

2°) Es lipschiciana respecto de y en D; o sea, que para todo par de puntos de D de la forma $(x, y_1), (x, y_2)$ se verifica:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|.$$

Vamos a hallar un intervalo cerrado $[x_0 - a, x_0 + a]$ en el cual exista una solución, y sólo una, de la ecuación (2.a) que cumpla la condición (2.b).

En primer lugar, el hecho de que f sea continua en D no implica que tenga que estar acotada en dicho dominio. Por ejemplo, $\ln x$ es continua en $(0, \infty)$, pero no está acotada en tal intervalo abierto; lo está, en cambio, en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset (0, \infty)$. Así, pues, como $f(x, y)$ es continua en D, es seguro que habrá un recinto $G \subset D$ en el cual f esté acotada. Es necesario, además, que G contenga al punto (x_0, y_0). O sea,

$$|f(x, y)| \leqslant \lambda \text{ en } G.$$

Para obtener un intervalo

$$I = [x_0 - a, x_0 + a]$$

donde exista una solución única de (2.a) que pase por (x_0, y_0), escojamos un a que cumpla las dos condiciones siguientes:

1°) Ha de ser $Ka < 1$ (K, constante de Lipschitz).

2º) Para todo punto $(x, y) \in G$ ha de verificarse:

$$x \in [x_0 - a, x_0 + a], \quad y \in [y_0 - \lambda a, y_0 + \lambda a].$$

Consideremos ahora el conjunto de las funciones $\varphi(x)$ continuas en el intervalo así construido

$$I = [x_0 - a, x_0 + a],$$

y establezcamos la métrica del máximo:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x \in I} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

Tenemos así un espacio métrico completo M, cuyos "puntos" son las funciones φ (recuérdese la última parte del apartado 2.4).

Si entre estas funciones φ escogemos sólo las que cumplen la condición

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant \lambda\alpha \tag{2.c}$$

tendremos un subespacio $M_1 \subset M$; y si demostramos que M_1 es cerrado, resultará que M_1 es también completo (ver apartado 2.4).

En el apartado 2.3 se da una definición de subconjunto cerrado de un espacio métrico. Vamos a dar aquí otra definición equivalente: *El subespacio $M_1 \subset M$ es cerrado si toda sucesión convergente de "puntos" de M_1, converge a un punto de M_1.* Sabemos que

$$M_1 = \{\varphi \in M / |\varphi(x) - y_0| \leqslant \lambda a, \forall x \in I\}.$$

Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión convergente de M_1, y sea φ su límite. Si probamos que $\varphi \in M_1$, habremos demostrado que M_1 es cerrado y, por lo tanto, completo. Pero demostrar que el límite φ pertenece a M_1 equivale a probar dos cosas: que φ es continua en el intervalo

$$I = [x_0 - a, x_0 + a]$$

y que cumple la condición

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant \lambda a.$$

Que φ es continua en I está claro, porque $\{\varphi_n\}$ es convergente en M con seguridad y, por lo tanto, es una sucesión de Cauchy (final del apartado 2.3). Como toda sucesión de Cauchy en M converge uniformemente (final del apartado 2.4), su límite es una función continua.

También cumple

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant \lambda a.$$

Efectivamente, todas las funciones de la sucesión $\{\varphi_n\}$ satisfacen la condición (2.c), puesto que pertenecen a M_1. Y por ser continuas ocurre:

$$\lim_{n \to \infty} |\varphi_n(x) - y_0| \leqslant \lambda a \Rightarrow \left| \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) - y_0 \right| \leqslant \lambda a.$$

Es decir:

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant \lambda a.$$

Así, pues, M_1 es cerrado y, por lo tanto, es completo.

Definamos ahora una aplicación T que va a actuar sobre las funciones $\varphi \in M_1$, entendiendo que φ es una función cualquiera de M_1, y no solamente el límite de $\{\varphi_n\}$. La definición de T es la siguiente:

$$(T\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt = \psi(x), \tag{2.d}$$

donde f es la función de la ecuación diferencial (2.a), y (x_0, y_0) el punto de la condición (2.b). Además, como ya sabemos, consideramos el intervalo $|x - x_0| \leqslant a$.

La aplicación T es contractiva en el subespacio completo M_1. Para probarlo tendremos que demostrar primero que las imágenes $T\varphi = \psi$ pertenecen a M_1. Desde luego, son funciones continuas, como se deduce inmediatamente observando la expresión (2.d). De esta misma fórmula (2.d) se obtiene:

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))\, dt|.$$

Como $f(x, y)$ está acotada en $G \subset D$; es decir, $|f(x, y)| \leqslant \lambda$ según dijimos antes, será:

$$|\psi(x) - y_0| \leqslant \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t))\, dt| \leqslant \lambda |x - x_0|.$$

Pero $|x - x_0| \leqslant a$. Luego

$$|\psi(x) - y_0| \leqslant \lambda a,$$

que es la condición para que una función pertenezca a M_1.

Vamos a probar ahora que T es contractiva. Habrá que demostrar que

$$d(T\varphi_1, T\varphi_2) \leqslant \alpha\, d(\varphi_1, \varphi_2), \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in M_1, \alpha < 1.$$

O sea:

$$d(\psi_1, \psi_2) \leqslant \alpha d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Teniendo en cuenta la expresión (2.d), resulta que para un punto cualquiera

$$x \in [x_0 - a. x_0 + a]$$

será:

$$\begin{aligned} & |\psi_1(x) - \psi_2(x)| = \\ = & \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))\, dt \right| \leqslant \\ \leqslant & \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t))|\, |dt| \end{aligned}$$

Como f es lipschiciana, el valor absoluto del integrando es $\leqslant K|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$, y nos queda:

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant$$
$$K \int_{x_0}^{x} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,|dt| \leqslant$$
$$\leqslant K \int_{x_0}^{x} \max |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,|dt| =$$
$$= K \max_{t\in[x_0,x]} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\,|x - x_0| \leqslant$$
$$\leqslant K|x - x_0| \max_{t\in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|,$$

donde, como sabemos, es

$$I = [x_0 - a, x_0 + a].$$

Pero

$$\max_{t\in I} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$$

es la distancia

$$d(\varphi_1, \varphi_2), \quad \text{y} \quad |x - x_0| \leqslant a.$$

Por lo tanto

$$|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant Ka\,d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Esto se verifica $\forall\, x \in I$; así, pues, también para el máximo del primer miembro:

$$\max_{x\in I} |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant Ka\,d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Dicho máximo es la distancia $d(\psi_1, \psi_2)$. Luego

$$d(\psi_1, \psi_2) \leqslant Ka\,d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como es

$$\psi_1 = T\varphi_1\,, \psi_2 = T\varphi_2\,, Ka < 1$$

(primera condición que establecimos para determinar un intervalo I), queda finalmente:

$$d(T\varphi_1, T\varphi_2) \leqslant Ka\,d(\varphi_1, \varphi_2),$$

que es la definición de contractividad.

Ya sabemos, pues, que T es contractiva en M_1, lo cual implica que $T\varphi = \varphi$ tiene solución en M_1 y es única.

Por otra parte, si hay una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación (2.a) que cumple la condición (2.b), integrando (2.a) entre x_0 y x tenemos la ecuación integral

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt,$$

que equivale a (2.a) y (2.b) simultáneamente, y es la misma (2.d). Es decir, lo que existe y es único en

$$I = [x_0 - a, x_0 + a]$$

es la solución de (2.a) que cumple la condición (2.b).

3. ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN

3.1. Obtención de la solución general

Las ecuaciones del tipo

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

que hemos considerado hasta ahora son de primer orden, pero no son lineales, en general. *Una ecuación lineal de primer orden, si es completa, tiene la forma*

$$A(x)y' + B(x)y = C(x),$$

donde dividiendo por $A(x)$ *queda:*

$$y' + a(x)y = h(x), \tag{3.1a}$$

y así las vamos a representar en adelante. Suponemos que los coeficientes $a(x)$ y $h(x)$ son funciones continuas en $I \subset \mathbb{R}$.

Estas ecuaciones se integran sin dificultad. Además, otras ecuaciones de orden superior al primero pueden ser reducidas a una lineal de primer orden.

Para integrar (3.1a) consideremos antes la ecuación

$$y' + a(x)y = 0 \tag{3.1b}$$

que, como ya dijimos en el apartado 1.2, llamamos homogénea. Esta homogeneidad lo es en el sentido de que no existe término independiente de la función desconocida ni de sus derivadas.

La ecuación (3.1b) es de variables separables y su integración es inmediata, pues de $y'/y = -a(x)$ se sigue

$$\ln|y| = -\int a(x)\,dx + K_1,$$

donde K_1 es una constante arbitraria que podemos poner en forma de logaritmo ($K_1 = \ln K$). Tenemos entonces:

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = -\int a(x)\,dx,$$

o sea:

$$y = Ke^{-\int a(x)\,dx} = K\psi(x),$$

que es la solución general de la ecuación homogénea.

Vemos, pues, que el espacio de las soluciones de esta ecuación es un espacio vectorial de dimensión 1. La constante K queda unívocamente determinada para cada punto (x_0, y_0), con $x_0 \in I$.

Como sólo vamos a necesitar una solución particular $u(x)$ de (3.1b), daremos a K el valor 1. Tendremos así:

$$u(x) = e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Para integrar la ecuación no homogénea (3.1a) utilizaremos el *método de Lagrange*, que consiste en suponer la existencia de una función $v(x)$ tal que el producto $u(x)\,v(x)$ sea solución de (3.1a); es decir, que sea $y = uv$. La primera derivada es $y' = u'v + uv'$. Llevando a (3.1a) estas expresiones de y e y' resulta:

$$u'v + uv' + a(x)uv = h(x),$$

o lo que es igual:

$$uv' + v(u' + a(x)u) = h(x).$$

La expresión entre paréntesis es idénticamente nula, puesto que u es solución de la homogénea. Nos queda $uv' = h(x)$, de donde

$$v' = \frac{1}{u}h(x) = h(x)exp\int a(x)\,dx.$$

Integrando, es:

$$v = \int h(x)\left(exp\int a(x)\,dx\right)dx + C,$$

donde C es la constante de integración. Y como $y = uv$, tendremos:

$$y = \left[exp\left(-\int a(x)\,dx\right)\right]\int h(x)\left(exp\int a(x)\,dx\right)dx + C\,exp\left(-\int a(x)\,dx\right),$$

que es la solución general de la eucación lineal de primer orden (3.1a).

Si llamamos

$$q = exp\int a(x)\,dx,$$

queda:

$$y = \frac{1}{q}\int qh\,dx + \frac{C}{q}, \tag{3.1c}$$

fácil de memorizar.

La solución general de (3.1a) es, pues, de la forma

$$y = C\psi(x) + \varphi(x),$$

que es lineal en C. Se advierte también que el espacio de las soluciones de la ecuación (3.1a) es un espacio afín asociado al vectorial de la homogénea.

3.2. Problema de valores iniciales

El teorema de existencia expuesto en el parágrafo 2 nos permite asegurar que si $a(x)$ y $h(x)$ son continuas en $I \subset \mathbb{R}$, hay una curva integral de (3.1a), y sólo una, que pasa por un punto (x_0, y_0), con $x_0 \in I$. Es decir, la constante C de (3.1c) viene unívocamente determinada por cada uno de esos puntos. De modo que si nos piden la curva integral que pasa por (x_0, y_0), basta sustituir estos dos valores en (3.1c) y despejar C que, sustituida nuevamente en (3.1c), nos da la solución particular que cumple $y(x_0) = y_0$.

Pero también podemos obtener una expresión que nos dé directamente la curva integral de (3.1a) que pasa por el punto (x_0, y_0); es decir, que cumple la condición $y(x_0) = y_0$. No hay más que hacer la integración entre x_0 y x en los cálculos del método de Lagrange. Entonces, la solución general (3.1c) queda así:

$$y = \left[exp\left(- \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right) \right] \int_{x_0}^{x} h(s) \left(exp \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right) ds + C\, exp\left(- \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right).$$

Si hacemos $x = x_0$ (ha de ser $y = y_0$), serán nulas obviamente las integrales $\int_{x_0}^{x}$, y nos queda $C = y_0$. Por lo tanto, la solución de (3.1a) que pasa por (x_0, y_0) es

$$y = y_0\, exp\left(- \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right) + \left[exp\left(- \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right) \right] \int_{x_0}^{x} h(s) \left(exp \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt \right) ds.$$

Si, por ejemplo, queremos hallar la curva integral que pasa por (1.3), haremos $x_0 = 1, y_0 = 3$ en la expresión anterior.

Hemos visto que para hallar la solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden ha habido que efectuar dos cuadraturas. Si conociéramos una solución particular de la homogénea, sólo necesitaríamos una cuadratura, y lo mismo si conociéramos una solución de la no homogénea. Si nos dieran dos soluciones particulares y_1, y_2 de esta última, no habría necesidad de ninguna cuadratura. La solución general de (3.1a) sería

$$y = y_1 + K(y_2 - y_1),$$

donde K es una constante arbitraria. Efectivamente, como la (3.1c) es de la forma

$$y = C\psi(x) + \varphi(x),$$

habrá dos valores C_1 y C_2 de C que nos darán y_1 e y_2 respectivamente. Es decir:

$$y_1 = C_1\psi(x) + \varphi(x), y_2 = C_2\psi(x) + \varphi(x).$$

Eliminando $\psi(x)$ y $\varphi(x)$ entre estas tres expresiones, tendremos:

$$y - y_1 = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}(y_2 - y_1) = K(y_2 - y_1).$$

Ejemplos:

1°) Hallar la curva integral de la ecuación

$$xy' + (1 - x)y = xe^x$$

que pasa por el punto (1,0).

Dividimos por x. Queda:

$$y' + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y = e^x.$$

Los coeficientes son funciones continuas, excepto en $x = 0$ el coeficiente de y. En el punto dado $(x_0, y_0) = (1, 0), x_0 = 1$ pertenece al intervalo de continuidad. Existe, pues, la curva integral pedida, y es única.

Utilizaremos la fórmula (3.1c), donde es

$$q = e^{\int (\frac{1}{x} - 1)\, dx} = \frac{x}{e^x}.$$

La solución general es:

$$y = \frac{1}{q} \int qh\, dx + \frac{C}{q} = \frac{e^x}{x} \int x\, dx + C\frac{e^x}{x} = e^x \left(\frac{x}{2} + \frac{C}{x}\right).$$

De la condición inicial se obtiene $C = -1/2$. La curva integral pedida es, pues,

$$y = \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{x}\right).$$

2°) Averiguar si en el haz integral de la ecuación

$$\frac{1}{\cos x} y' + y = 1$$

existe alguna recta real.

Multiplicando por $\cos x$ nos queda:

$$y' + y \cos x = \cos x.$$

Con la fórmula (3.1c) tenemos $q = e^{\operatorname{sen} x}$. La solución general será:

$$y = e^{-\operatorname{sen} x} \int e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx + \frac{C}{e^{\operatorname{sen} x}} = 1 + C\, e^{-\operatorname{sen} x}.$$

La única recta que pertenece a esta integral general es la que corresponde al valor $C = 0$; o sea, la recta $y = 1$.

4. DEPENDENCIA LINEAL DE FUNCIONES Y OPERADORES DIFERENCIALES LINEALES

4.1. Funciones linealmente independientes

Una función $u_n(x)$ *depende linealmente de otras* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_{n-1}(x)$, *si es una combinación lineal de ellas; es decir, si*

$$u_n(x) = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k(x),$$

donde los λ_k *son números reales o complejos.*

Podemos decirlo de otra manera:*las funciones* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *son linealmente dependientes si la igualdad*

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \tag{4.1a}$$

no implica necesariamente que sean nulos todos los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si esta igualdad se verifica en tales condiciones y es λ_m un coeficiente no nulo, podemos despejar en (4.1a) la función u_m que tiene dicho coeficiente, y tendremos:

$$u_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} u_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} u_2 - \ldots - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} u_n,$$

con lo cual u_m es una combinación lineal de las demás funciones.

Por el contrario, *n funciones* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *son linealmente independientes si la igualdad* (4.1a) *implica necesariamente*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Supongamos que estas n funciones son sucesivamente derivables en $I \subset \mathbb{R}$, al menos hasta la derivada de orden $n-1$ inclusive. Los valores de los coeficientes λ_k que satisfacen a (4.1a) satisfarán también a la derivada de (4.1a) de cualquier orden, si existe. Por lo tanto, los λ_k que hacen cierta la igualdad (4.1a) satisfacen al sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \\ \lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_2 + \ldots + \lambda_n u'_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 u_1^{(n-1} + \lambda_2 u_2^{(n-1} + \ldots + \lambda_n u_n^{(n-1} = 0 \end{cases}$$

Considerando como incógnitas a los λ_k, este sistema homogéneo tiene solución única $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ si no es idénticamente nulo el determinante

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \ldots & u'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^{(n-1} & u_2^{(n-1} & \ldots & u_n^{(n-1} \end{vmatrix}$$

Este determinante cuyas filas (columnas) están constituidas respectivamente por n funciones de una variable y las derivadas sucesivas de dicha fila (columna) hasta la de orden $n-1$ inclusive es, como ya sabemos, el *wronskiano* de las referidas funciones.

Por lo tanto, *n funciones son linealmente independientes si su wronskiano es distinto de cero en el intervalo de definición de las funciones y de sus derivadas. Si el wronskiano es nulo en tal intervalo, las n funciones son linealmente dependientes. El recíproco es también cierto, como fácilmente se demuestra.*

Por ejemplo, el wronskiano de

$$u_1 = 1\,, u_2 = e^x\,, u_3 = e^2x$$

es

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} > 0.$$

Estas funciones son, pues, linealmente independientes en $\mathbb{R}$. No lo son, en cambio,

$$v_1 = 1\,, v_2 = x^2\,, v_3 = 3 - 2x^2.$$

Si dos funciones son linealmente dependientes, una cualquiera de ambas es múltiplo de la otra.

4.2. Operadores diferenciales lineales

No vamos a desarrollar aquí la teoría de los operadores lineales. Vamos a considerar solamente los operadores que intervienen en las ecuaciones deferenciales lineales ordinarias, introduciéndolos de un modo sencillo y elemental.

Operadores $D, D^2, \ldots$

El operador D es una aplicación que hace corresponder a cada función derivable $f(x)$ su derivada primera $f'(x)$. Escribiremos, pues: $Df = f'$. A este operador D se le representa también con el símbolo d/dx (derivada vacía).

Si f es derivable dos veces, el operador D^2 tiene el siguiente significado:

$$D^2f = D(Df) = Df' = f''.$$

Otro símbolo de D^2 es d^2/dx^2.

En general, $D^n = d^n/dx^n$ es tal que si f es derivable n veces se tiene:

$$D^nf = f^{(n} = \frac{d^nf}{dx^n}.$$

Es claro que el operador $-D^n$, opuesto a D^n, significa

$$(-D^n)f = -(D^nf) = -f^{(n}.$$

La suma $D^m + D^n$ de dos operadores se define del siguiente modo:

$$(D^m + D^n)f = D^m f + D^n f = f^{(m} + f^{(n},$$

si f es sucesivamente derivable. Obviamente se verifica

$$D^m + D^n = D^n + D^m.$$

La suma de dos operadores opuestos los cancela.

Puesto que D^n es una aplicación lineal, será:

$$D^n(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 D^n f_1 + \lambda_2 D^n f_2 = \lambda_1 f_1^{(n} + \lambda_2 f_2^{(n}.$$

La composición (producto) de dos operadores D^m y D^n se expresa por $D^m D^n$, y su significado es:

$$(D^m D^n)f = D^m(D^n f) = D^m f^{(n} = f^{(n+m} = D^{n+m} f.$$

Es obvio que $D^m D^n = D^n D^m$.

Podemos decir, por tanto: *Los operadores $D^k (k \in \mathbb{N})$ son conmutativos en la suma y en el producto.*

Todo operador D^n premultiplicado por una función φ es también un operador, y su significado es:

$$(\varphi D^n)f = \varphi(D^n f) = \varphi f^{(n}.$$

La suma $\varphi_1 D^m + \varphi_2 D^n$ se define así:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 D^m + \varphi_2 D^n)f &= (\varphi_1 D^m)f + (\varphi_2 D^n)f = \\ = \varphi_1(D^m f) + \varphi_2(D^n f) &= \varphi_1 f^{(m} + \varphi_2 f^{(n}, \end{aligned}$$

y es conmutativa.

La composición o producto $(\varphi_1 D^m)(\varphi_2 D^n)$ aplicado a f es:

$$\begin{aligned} (\varphi_1 D^m)(\varphi_2 D^n)f &= (\varphi_1 D^m)[(\varphi_2 D^n)f] = \\ = (\varphi_1 D^m)(\varphi_2 f^{(n}) &= \varphi_1(D^m(\varphi_2 f^{(n})). \end{aligned}$$

Si invertimos el orden, tendremos:

$$\begin{aligned} [(\varphi_2 D^n)(\varphi_1 D^m)]f &= (\varphi_2 D^n)[(\varphi_1 D^m)f] = \\ = (\varphi_2 D^n)(\varphi_1 f^{(m}) &= \varphi_2[D^n(\varphi_1 f^{(m})]. \end{aligned}$$

Ambos resultados no son iguales, en general. Por ejemplo:

$$[(D)(xD)]f = D[(xD)f] = D(xf') = f' + xf''.$$

Invirtiendo el orden tenemos:

$$[(xD)(D)]f = (xD)(Df) = (xD)f' = xf''.$$

Así, pues, *el producto de operadores de la forma* φD^n *no es conmutativo, a menos que las* φ *sean constantes.*

Como las propiedades lineales persisten, será:

$$\begin{aligned} &\varphi D^n(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1(\varphi D^n)f_1 + \lambda_2(\varphi D^n)f_2 = \\ = \ &\lambda_1 \varphi f_1^{(n} + \lambda_2 \varphi f_2^{(n} = \varphi(\lambda_1 f_1^{(n} + \lambda_2 f_2^{(n}). \end{aligned}$$

Operadores L

Un operador L *es el que tiene la forma*

$$L = D^n + a_1(x)D^{n-1} + a_2(x)D^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x),$$

donde supondremos que $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ *son funciones continuas en* $I \subset \mathbb{R}$. *Es, pues, un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes variables.*

En virtud de la definición de suma de operadores monomios φD^n dada antes, el significado de L, aplicado a una función y, será:

$$\begin{aligned} &Ly = [D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)]y = \\ = \ &y^{(n} + a_1(x)y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y, \end{aligned}$$

entendiendo que

$$a_n(x) = a_n(x)D^0, \text{ y que } D^0 y = y.$$

Vemos, pues, que una ecuación diferencial lineal de orden cualquiera puede ser expresada de un modo general por $Ly = h(x)$.

La suma $L_1 + L_2$ y el producto o composición $L_1 L_2$ de dos operadores L se definen de la misma manera que la suma y el producto de operadores monomios, y se deduce: la suma de operadores L es conmutativa. El producto no lo es, a menos que los L tengan coeficientes constantes.

El operador $-L$ es el opuesto a L, y la suma de ambos los cancela.

Factorización de los operadores L con coeficientes constantes.

Formalmente, un operador L con coeficientes constantes es un polinomio en D de grado n, y como tal polinomio puede ser descompuesto en factores binomios si se conoce las raices de $L = 0$.

Sea

$$L = D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, y sean $r_1, r_2, \ldots, r_n$ los n ceros de este polinomio en D. Entonces, tendremos:

$$L = (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n).$$

Cada factor es un operador binomio. Si aplicamos L a una función y sucesivamente derivable, podemos escribir:

$$Ly = (D - r_1)(D - r_2) \ldots (D - r_n)y.$$

El operador binomio que actúa inmediatamente sobre y es, en este caso, $D - r_n$. Esta actuación produce una cierta función de x que, a su vez, queda sometida inmediatamente a la actuación del operador $D - r_{n-1}$, produciéndose otra función que queda bajo la actuación inmediata de $D - r_{n-2}$, y así sucesivamente. Pero como los binomios formales $D - r_k$ son operadores conmutativos respecto del producto, por tener coeficientes constantes, podemos alterar el orden. El resultado final será siempre *la misma función* $h(x)$. Si los factores fueran de la forma $\varphi_k(x)D - r_k$, a cada permutación de ellos en la factorización de L le correspondería una función distinta, en general. En nuestro caso, siendo indiferente el orden, podemos hacer que actúe sobre la función y en primer lugar cualquiera de los operadores $D - r_k$.

Nos queda decir que, en virtud de la definición de los operadores L, es obvio que $L0 = 0$, y que si b es una constante será $Lb = a_n b$.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES

5.1. Ecuación lineal homogénea

Una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes tiene la forma

$$y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + a_2 y^{(n-2} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (5.1a)$$

que también podemos escribir así:

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)y = 0;$$

es decir, $Ly = 0$, donde L es un operador de orden n, lineal, con coeficientes constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ *dos soluciones particulares de la ecuación* (5.1a). Supondremos que u_1 y u_2 son linealmente independientes. Si no lo fueran estaríamos considerando un múltiplo de una cualquiera de ellas. Pues bien, *toda combinación lineal* $c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$ *es también solución de* (5.1a), porque el operador L de dicha ecuación tiene las propiedades lineales, y será:

$$L(c_1u_1(x) + c_2u_2(x)) = c_1Lu_1(x) + c_2Lu_2(x).$$

Como $Lu_1(x) = 0$, $Lu_2(x) = 0$, por haber supuesto que u_1 y u_2 son soluciones de (5.1a), el segundo miembro es idénticamente nulo.

Supongamos ahora que conocemos tantas soluciones particulares de (5.1a) linealmente independientes como orden tiene la ecuación. Es decir, *sean*

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$$

n soluciones de (5.1a) *linealmente independientes. Toda combinación lineal de ellas*

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x)$$

es también solución de (5.1a) y tiene, precisamente, n constantes arbitrarias. De modo que dando por sentado lo dicho en el apartado 0.2. de la introducción, *esta combinación lineal es la solución general de la ecuación.*

Vemos, pues, que el espacio de las soluciones de una ecuación lineal homogénea (5.1a) de orden n es un espacio vectorial de dimensión n. Todo conjunto $\{u_1, u_2, \ldots . u_n\}$ de n funciones linealmente independientes que sean soluciones particulares de (5.1a) es una base de dicho espacio vectorial. Dando valores a las n constantes de

$$\sum_{k=1}^{n} c_ku_k(x)$$

obtendremos las soluciones particulares de la ecuación homogénea, incluidas, claro es, las de la base escogida $\{u_k\}$.

En el apartado 4.1. del parágrafo anterior vimos que la condición necesaria y suficiente para que n funciones continuas y sucesivamente derivables en $I \subset \mathbb{R}$ sean linealmente independientes es que su wronskiano sea distinto de cero en I. Si se trata de una base $\{u_k\}$ del espacio vectorial de las soluciones de (5.1a), será, pues: $W(u_k) \neq 0$ en I. Si este wronskiano fuese cero para un $x \in I$, sería cero en I.

En resumen:*para hallar la solución general de una ecuación lineal homogéna de orden n tendremos que encontrar n soluciones particulares de ella que sean linealmente independientes. La solución general será una combinación lineal genérica de dichas n soluciones.*

Si las n soluciones particulares no fueran linealmente independientes, el número de constantes arbitrarias de una combinación lineal genérica de las n soluciones particulares sería menor que n, con lo cual dicha combinación no podría ser la solución general. Sería una familia parcial de soluciones.

Veamos ahora la manera de encontrar n soluciones particulares de (5.1a) que sean linealmente independientes; o sea, que constituyan una base del espacio vectorial de las soluciones de la ecuación.

Hemos dicho ya que en la ecuación (5.1a) podemos destacar el operador L, escribiendo la ecuación en la forma

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)y = 0. \tag{5.1b}$$

El operador L es la expresión entre paréntesis y, como ya hemos dicho, es un polinomio formal en D. Se le llama *polinomio característico* de la ecuación diferencial. Al considerarlo como tal, se suele sustituir la letra D por la r; pero nosotros vamos a conservar la D, y utilizaremos la r sólo para las expresiones de las raíces de $L = 0$.

Estas raíces de $L = 0$ pueden ser reales (simples y múltiples) e imaginarias (idem). Consideraremos cada uno de los cuatro casos.

Primer caso:

Todas las raíces son reales y distintas.

Sean $r_1, r_2, \ldots, r_n$ las n raíces de $L = 0$, que supondremos reales y distintas. Factorizando L, la ecuación será:

$$Ly \equiv (D - r_1)(D - r_2)\ldots(D - r_n)y = 0. \tag{5.1c}$$

Como los operadores $D - r_k$ son conmutativos en el producto, podemos alterar el orden, y tendremos siempre la misma ecuación $Ly = 0$. Esto no ocurre si los binomios son de la forma $\varphi_k(x)\,D - r_k$, pues al alterar su orden en una expresión como la (5.1c), obtendríamos cada vez una ecuación homogénea distinta, por no ser conmutativos.

Por lo tanto, podemos colocar al lado de y todos y cada uno de los operadores $D - r_k$ de la ecuación (5.1c). Entonces, resulta que hay n posibilidades de que sea idénticamente nulo el primer miembro de (5.1c), y estas posibilidades son:

$$(D - r_1)y = 0,\ (D - r_2)y = 0, \ldots, (D - r_n)y = 0,$$

ya que si, por ejemplo, es $(D - r_2)y = 0$, el producto de los operadores restantes es un operador L_1 que actuará sobre cero, y será:

$$L_1((D - r_2)y) = L_1 0 = 0.$$

Cada una de las igualdades $(D - r_k)y = 0$ es una ecuación lineal de primer orden: $y' = r_k y$, cuya integración es inmediata, pues de $y'/y = r_k$ se sigue: $\ln|y| = r_k x$, habiendo dado a la constante el valor cero. Por lo tanto, para $k = 1, 2, \ldots, n$ tendremos n soluciones particulares

$$u_1(x) = e^{r_1 x},\ u_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots,\ u_n(x) = e^{r_n x},$$

que son *linealmente independientes*, puesto que se trata de exponenciales cuyos exponentes tienen coeficientes distintos, por hipótesis: su wronskiano es distinto de cero.

Así, pues, *cuando las raíces de la ecuación característica* $L = 0$ *son todas reales y distintas, la solución general de la ecuación homogénea (5.1a) es:*

$$y_H = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x},$$

donde c_k *son n constantes arbitrarias y* r_k *las raíces.*

Se comprende que esto mismo vale si las r_k son imaginarias simples; pero entonces evitaremos la presencia de coeficientes imaginarios, como veremos después.

Segundo caso:

Hay raíces reales múltiples

Supongamos que el polinomio característico de la ecuación (5.1b) tiene todas sus raíces reales, y que una de ellas, la r_1 por ejemplo, es múltiple de orden m, y las demás son simples. Entonces, la forma (5.1c) de la ecuación será:

$$Ly \equiv (D - r_1)^m (D - r_2) \dots (D - r_{n-m+1}) y = 0. \qquad (5.1d)$$

Con el procedimiento del primer caso, sólo podemos obtener ahora $n - m + 1$ soluciones particulares linealmente independientes, que son las que resultan de hacer sucesivamente

$$(D - r_1)y = 0,\ (D - r_2)y = 0, \dots, (D - r_{n-m+1})y = 0,$$

cuyas integrales, particularizadas haciendo cero las constantes de integración, son

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_{n-m+1} x}.$$

Una combinación lineal de estas soluciones particulares de $Ly = 0$ linealmente independientes es también solución de $Ly = 0$, pero sólo contendrá $n - m + 1$ constantes arbitrarias y, por lo tanto, no será solución general de (5.1a). Para completar el número necesario de constantes observemos que tanto la ecuación (5.1d), como las que resultan de derivarla respecto a D $m - 1$ veces se satisfacen para $D = r_1$. O lo que es lo mismo: tanto Le^{rx} como sus $m - 1$ derivadas sucesivas respecto de la variable r (que es la D del polinomio característico) se anulan para $r = r_1$. Es decir:

$$Le^{r_1 x} = Lxe^{r_1 x} = Lx^2 e^{r_1 x} = \dots = Lx^{m-1} e^{r_1 x} = 0.$$

Por lo tanto, las funciones

$$e^{r_1 x},\ xe^{r_1 x},\ x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{m-1} e^{r_1 x}$$

son m soluciones particulares de (5.1a), que junto con las

$$e^{r_2 x},\ e^{r_3 x}, \dots, e^{r_{n-m+1} x}$$

correspondientes a las raíces simples nos dan n soluciones particulares de la ecuación homogénea, linealmente independientes (su wronskiano es $\neq 0$). La solución general será una combinación lineal genérica de todas ellas.

Así, pues, *cuando hay una raíz real múltiple r_1 de orden m, la parte de la solución general debida a dicha raíz es*

$$e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}),$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ son m constantes arbitrarias.

Tercer caso:

Hay raíces imaginarias simples

Si el polinomio característico de (5.1b) tiene una raíz imaginaria simple $r_1 = +a + bi$, también tiene la raíz conjugada $r_2 = a - bi$. Luego dos soluciones particulares de (5.1b), o sea, de (5.1a), son $e^{(a+bi)x}$ y $e^{(a-bi)x}$. La parte de solución general debida a estas dos raíces será de la forma

$$Ae^{(a+bi)x} + Be^{(a-bi)x},$$

donde A y B son constantes arbitrarias complejas. Esta expresión puede escribirse así:

$$e^{ax}(Ae^{ibx} + Be^{-ibx});$$

y utilizando las fórmulas de Euler:

$$e^{\pm ibx} = \cos bx \pm i \operatorname{sen} bx,$$

nos queda:

$$e^{ax}((A + B)\cos bx + i(A - B)\operatorname{sen} bx).$$

Hemos dicho que A y B son constantes complejas:

$$A = p + qi, \quad B = r + si.$$

Podemos hacer que $A + B$ y $(A - B)i$ sean constantes reales arbitrarias. Tendría que ser entonces

$$A + B = p + r + (q + s)i, \text{con } q + s = 0;$$

$$A - B = p - r + (q - s)i, \text{con } p - r = 0,$$

quedándonos

$$B = \bar{A} \Rightarrow A + B = 2p = c_1, \; A - B = 2qi;$$

por lo tanto, $(A - B)i = -2q = c_2$. Como p y q son números reales arbitrarios, también lo serán $A + B = c_1$ y $(A - B)i = c_2$. Así, pues:*cuando hay raíces imaginarias simples $a \pm bi$, la parte de la solución general debida a este par de raíces conjugadas es*

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx).$$

Cuarto caso:

Imaginarias múltiples

Si $a \pm bi$ son raíces múltiples de orden m, es ya muy fácil probar que la parte de solución correspondiente a ellas es

$$e^{ax}[(c_1 + c_2x + \ldots + c_mx^{m-1})\cos bx + (c_{m+1} + c_{m+2}x + \ldots + c_{2m}x^{m-1})\operatorname{sen} bx].$$

Ejemplos:

1°) Hallar la integral general de la ecuación

$$y^V - 8y^{IV} + 26y''' - 32y'' + 13y' = 0.$$

El polinomio característico

$$D^5 - 8D^4 + 26D^3 - 32D^2 + 13D$$

tiene los ceros o raíces siguientes:

$$r_1 = 0, r_2 = r_3 = 1, r_4 = 3 + 2i, r_5 = 3 - 2i.$$

Aplicando las fórmulas correspondientes a cada tipo de raíces, puede escribirse directamente la solución general, que es:

$$y_H = c_1 + (c_2 + c_3x)e^x + (c_4\cos 2x + c_5\operatorname{sen} 2x)e^{3x}.$$

Son soluciones particulares linealmente independientes

$$\{1, e^x, xe^x, e^{3x}\cos 2x, e^{3x}\operatorname{sen} 2x\}.$$

que constituyen una base del espacio vectorial de todas las soluciones.

2°) La ecuación homogénea

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0$$

tiene el polinomio característico $D^4 + 2D^2 + 1$, cuyas raíces son

$$r_1 = r_2 = i, r_3 = r_4 = -i.$$

Es el caso de imaginarias múltiples $a \pm bi$, con $a = 0, b = 1$. La solución general es, pues:

$$y_H = (c_1 + c_2x)\cos x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} x.$$

3°) Supongamos que la ecuación característica de una homogénea tiene las siguientes raíces de todos los tipos:

$$r_1 = 2, r_2 = -1, r_3 = r_4 = r_5 = 3, r_6 = -i,$$
$$r_7 = i, r_8 = r_9 = 2 + 3i, r_{10} = r_{11} = 2 - 3i.$$

La solución general será:

$$y_H = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + e^{3x}(c_3 + c_4x + c_5x^2) + c_6\cos x +$$
$$+ \quad c_7\operatorname{sen} x + e^{2x}[(c_8 + c_9x)\cos 3x + (c_{10} + c_{11}x)\operatorname{sen} 3x].$$

5.2. Ecuación lineal no homogénea

Es una ecuación de la forma $Ly = h(x)$, donde L es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$. O sea:

$$Ly \equiv y^{(n} + a_1 y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = h(x). \qquad (5.2a)$$

La solución general de esta ecuación es igual a la general de la homogénea más una solución particular cualquiera de la propia ecuación (5.2a). Efectivamente, si y_H es la solución general de $Ly = 0$, y suponemos que y_P es una solución particular de (5.2a), la expresión $y = y_H + y_P$ contiene n constantes arbitrarias, que son las que figuran en y_H. Además se verifica:

$$Ly = L(y_H + y_P) = Ly_H + Ly_P.$$

Pero Ly_H es idénticamente nula, y $Ly_P = h(x)$, ya que, por hipótesis, y_P satisface a (5.2a). Por lo tanto, $y = y_H + y_P$ es la solución general de (5.2a).

Dada una ecuación (5.2a), sabemos cómo obtener la solución de la homogénea $Ly = 0$ por el procedimiento de encontrar las raíces de la ecuación característica, si ello merece la pena, o por otro procedimiento que nos permita llegar a n soluciones de $Ly = 0$ linealmente independientes. Dando esto por sentado, se trata ahora de encontrar una solución particular de (5.2a). Para ello expondremos dos métodos que conducen a y_P : el llamado de la variación de las constantes (Lagrange) y el método de los coeficientes indeterminados, conocido también por el de las "familias". Como vamos a partir del hecho de que conocemos n soluciones de la ecuación homogénea, linealmente independientes, tanto da que el operador L tenga coeficientes constantes o variables. Supondremos que en (5.2a) los coeficientes son (por el momento) variables: $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$.

Método de la variación de las constantes

Sean $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea $Ly = 0$ correspondiente a (5.2a). Como sabemos, la solución general y_H de $Ly = 0$ es

$$y_H = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_n u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x).$$

Vamos a sustituir las n constantes c_k por n funciones $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$ de tal manera que la suma

$$c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) + \ldots + c_n(x)u_n(x)$$

sea, precisamente, una solución particular y_P de la ecuación dada $Ly = h(x)$.

Para determinar estas n funciones $c_k(x)$ deberemos disponer de n condiciones; pero, en realidad, sólo disponemos de una, que es la propia ecuación (5.2a). Por lo

tanto, debemos establecer libremente $n-1$ condiciones compatibles procurando que los cálculos que sigan sean sencillos. Procederemos del siguiente modo:

Partimos de la expresión

$$y_P = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k,$$

entendiendo en adelante que las c_k no son constantes, sino funciones de x, derivables sucesivamente. Derivemos, y tendremos:

$$y'_P = \sum_{k=1}^{n} c_k u'_k + \sum_{k=1}^{n} c'_k u_k.$$

La primera condición que vamos a imponer libremente es que sea cero la segunda suma del segundo miembro. Es decir,

1^a condición:

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k u_k = 0.$$

Nos queda entonces, como primera derivada de y_P, lo siguiente:

1^a derivada:

$$y'_P = \sum_{k=1}^{n} c_k u'_k.$$

Derivemos y'_P. Será:

$$y''_P = \sum_{k=1}^{n} c_k u''_k + \sum_{k=1}^{n} c'_k u'_k.$$

La segunda condición que imponemos es que sea nula la segunda suma del segundo miembro. O sea:

2^a condición:

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k u'_k = 0.$$

Tendremos, entonces:

2^a derivada:

$$y''_P = \sum_{k=1}^{n} c_k u''_k.$$

Volviendo a derivar y reiterando el proceso condicional llegamos a:

(n-1)^a condición:

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k u_k^{(n-2} = 0,$$

(n-1)^a derivada:

$$y_P^{(n-1} = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k^{(n-1}.$$

Ya hemos agotado las condiciones que podemos establecer libremente. Por lo tanto, si ahora derivamos $y_P^{(n-1}$, no podremos imponer ninguna condición más, y hemos de aceptar la expresión completa que resulte. Así, pues:

n^a derivada:

$$y_P^{(n} = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k^{(n} + \sum_{k=1}^{n} c'_k u_k^{(n-1}.$$

Las expresiones de $y_P, y'_P, \ldots, y_P^{(n-1}, y_P^{(n}$ anteriores han de satisfacer a la ecuación (5.2a), de manera que llevándolas a ella tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k^{(n} + \sum_{k=1}^{n} c'_k u_k^{(n-1} + a_1(x) \sum_{1}^{n} c_k u_k^{(n-1} + a_2(x) \sum_{1}^{n} c_k u_k^{(n-2} + \ldots$$

$$\ldots \quad a_{n-1}(x) \sum_{1}^{n} c_k u'_k + a_n(x) \sum_{1}^{n} c_k u_k = h(x).$$

El primer miembro puede escribirse de otra forma. Observemos que en todos los sumatorios, excepto en el segundo (que lo colocaremos al final), figuran como factores las funciones c_k. Vamos a elegir un solo sumando de cada sumatorio (menos del segundo), pero de un mismo índice k; por ejemplo, $k = 1$, poniendo puntos suspensivos para los demás sumandos no elegidos. Tendremos:

$$\ldots + c_1 u_1^{(n} + \ldots + a_1(x) c_1 u_1^{(n-1} + \ldots + a_2(x) c_1 u_1^{(n-2} + \ldots +$$

$$+ \quad a_{n-1}(x) c_1 u'_1 + \ldots + a_n(x) c_1 u_1 + \ldots + \sum_{1}^{n} c'_k u_k^{(n-1} = h(x).$$

Agrupemos estos sumandos sueltos y saquemos c_1 factor común. Será:

$$c_1 \left(u_1^{(n} + a_1(x) u_1^{(n-1} + a_2(x) u_1^{(n-2} + \ldots + a_n(x) u_1 \right) + \ldots + \sum_{1}^{n} c'_k u_k^{(n-1} = h(x).$$

Lo que hay dentro del paréntesis es idénticamente nulo, pues u_1 es una solución de la ecuación homogénea $Ly = 0$. Los puntos fuera del paréntesis indican otras agrupaciones análogas, pero con un índice distinto cada vez, y por lo tanto son también nulas. Nos queda, pues:

$$\sum_{k=1}^{n} c'_k u_k^{(n-1} = h(x).$$

Escribamos en forma desarrollada las $n-1$ condiciones que impusimos libremente y esta última igualdad:

$$\left.\begin{array}{l} c'_1 u_1 + c'_2 u_2 + \ldots + c'_n u_n = 0 \\ c'_1 u'_1 + c'_2 u'_2 + \ldots + c'_2 u'_n = 0 \\ c'_1 u''_1 + c'_2 u''_2 + \ldots + c'_n u''_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c'_1 u_1^{(n-1} + c'_2 u_2^{(n-1} + \ldots + c'_n u_n^{(n-1} = h(x) \end{array}\right\} \qquad (5.2b)$$

Es un sistema lineal no homogéneo cuyas incógnitas son las derivadas primeras de las funciones c_k que deseamos conocer. El determinante de este sistema es el wronskiano de las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$; y no puede ser idénticamente nulo porque las u_k son, por hipótesis, linealmente independientes. Luego hay una *solución única* para las c'_k, que se obtendrán por la regla de Cramer.

Una vez halladas las c'_k, tendremos las c_k integrando, con lo cual cada función c_k vendrá acompañada de una constante de integración. Podemos dar el valor cero a todas estas constantes, y entonces la expresión

$$y_P = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)u_k(x)$$

es una solución particular de la ecuación dada $Ly = h(x)$. La solución general será

$$y = y_H + y_P = \sum_{1}^{n} \lambda_k u_k(x) + \sum_{1}^{n} c_k(x)u_k(x).$$

Si al integrar las c'_k conservamos las constantes arbitrarias de integración, la expresión

$$y = \sum_{1}^{n} c_k(x)u_k(x)$$

es ya la solución general de $Ly = h(x)$.

Vemos también que el espacio de las soluciones de la ecuación (5.2a) es un espacio afín asociado al vectorial de la correspondiente homogénea.

La obtención de una c'_k del sistema (5.2b) por la regla de Cramer nos lleva a

$$c'_k = \frac{W_k}{W(u_1, u_2, \ldots, u_n)},$$

donde $W(u_1, \ldots, u_n)$ es el wronskiano de las n soluciones de la ecuación homogénea $Ly = 0$ linealmente independientes, y W_k es el determinante que resulta de sustituir en W la columna (fila) k por $(0\,0 \ldots 0\,h(x))$. En los problemas y ejercicios podemos acudir directamente a la regla de Cramer sin necesidad de establecer el sistema (5.2b).

Ejemplos:

a) Para hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

empezaremos resolviendo la homogénea. El polinomio característico es

$$D^2 - 3D + 2 = (D - 1)(D - 2).$$

Luego dos soluciones linealmente independientes de $Ly = 0$ son

$$u_1(x) = e^x,\ u_2(x) = e^{2x}.$$

Una solución particular de $Ly = e^x$ se obtiene directamente:

$$c'_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = -1; \qquad c'_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix}} = e^{-x}.$$

De donde

$$c_1(x) = -x + \lambda_1,\ c_2(x) = -e^{-x} + \lambda_2.$$

El producto

$$y = u_1(x)c_1(x) + u_2(x)c_2(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} - e^x(x+1)$$

es la solución general, donde $y_H = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}$ es la general de la homogénea, y $y_P = -e^x(x+1)$ es una solución particular de la no homogénea.

b) Consideremos la ecuación

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = x,$$

y sean $u_1(x), u_2(x)$ dos soluciones de la homogénea, linealmente independientes. Sabiendo que $u_1(x) = x^2$ y que $W(u_1, u_2) = -3$, se pide:

a) Hallar $u_2(x)$ con la condición $u_2(1) = 1$.

b) hallar la solución general de la ecuación considerada.

c) Determinar los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$.

a) Del wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & u_2 \\ 2x & u'_2 \end{vmatrix} = -3$$

se obtiene

$$x^2u'_2 - 2xu_2 = -3,$$

que puesta en forma normal es:

$$u'_2 - \frac{2}{x}u_2 = -\frac{3}{x^2}.$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de primer orden, que sabemos integrar (parágrafo 3). Tenemos:

$$u_2 = \frac{1}{q}\int q\left(-\frac{3}{x^2}\right)dx + \frac{c}{q},$$

donde

$$q = exp\left(-\int 2x^{-1}dx\right) = x^{-2},$$

con constante de integración nula. Por lo tanto, resulta

$$u_2 = \frac{1}{x} + Cx^2.$$

La condición inicial es $u_2(1) = 1$; conduce a $C = 0$. Nos queda $u_2 = 1/x$.

b) Conocemos, pues, dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

lo cual nos permite encontrar la solución general de la no homogénea $Ly = x$ sin necesidad de saber cúales son los coeficientes $a_1(x)$ y $a_2(x)$. Tenemos:

$$c'_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}; \qquad c'_2 = \frac{\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} \\ 2x & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}x^3.$$

Integrando y conservando las constantes de integración, es:

$$c_1(x) = \frac{1}{3}x + \lambda_1, c_2(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \lambda_2.$$

La solución general pedida será:

$$y = c_1(x)u_1(x) + c_2(x)u_2(x) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x^3.$$

c) Puesto que $u_1(x) = x^2$, $u_2(x) = 1/x$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

la satisfarán. De modo que tendremos el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x\,a_1(x) + x^2\,a_2(x) &= -2 \\ -\ x^{-2}\,a_1(x) + x^{-1}\,a_2(x) &= -2x^{-3}, \end{aligned}$$

que nos da $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = -2x^{-2}$. La ecuación diferencial del enunciado es, pues:

$$x^2 y'' - 2y = x^3,$$

que es un tipo de ecuación de Euler, incompleta, como veremos más adelante.

Método de los coeficientes indeterminados (familias)

Este método para encontrar una solución particular y_P de la ecuación (5.2a) tiene utilidad si el segundo miembro $h(x)$ es una función que posee un número finito de derivadas linealmente independientes. Es necesario también que los coeficientes a_k de (5.2a) sean cosntantes.

Las funciones elementales $x^m (m \in \mathbb{N}), e^{px}, \operatorname{sen} qx, \cos qx$ tienen un número finito de derivadas linealmente independientes. Y también sus combinaciones por suma y producto finitos. Así, pues, cuando $h(x)$ es una cualquiera de dichas funciones elementales, o una combinación de ellas en las condiciones citadas, podemos utilizar este método.

Tomemos una cualquiera de las cuatro funciones elementales anteriores, siempre con coeficiente 1. Llamamos *familia* de dicha función al conjunto formado por ella misma y por todas sus derivadas linealmente independientes, pero también con coeficiente

1. Anotaremos Fam (x^m), Fam(e^{px}), etc. Será:

$$\begin{aligned}
&\text{Fam}\,(x^m) = \{1, x, x^2, \ldots, x^m\}\\
&\text{Fam}\,(e^{px}) = \{e^{px}\}\\
&\text{Fam}\,(\operatorname{sen} qx) = \{\operatorname{sen} qx, \cos qx\}\\
&\text{Fam}\,(\cos qx) = \{\cos qx, \operatorname{sen} qx\}.
\end{aligned}$$

Las familias de los productos binarios, ternarios,... de estas funciones se forman del mismo modo que los productos cartesianos correspondientes de sus familias respectivas, multiplicando los elementos que van a constituir los pares, las ternas, etc. Por ejemplo:

$$\text{Fam}\,(x^2 \operatorname{sen} 3x) = \{\operatorname{sen} 3x, \cos 3x, x \operatorname{sen} 3x, x\cos 3x, x^2 \operatorname{sen} 3x, x^2 \cos 3x\}.$$

La familia de una suma de funciones es la unión de las familias de dichas funciones. Es decir:

$$\text{Fam}\,(h_1(x) + h_2(x)) = (\text{Fam}\,h_1(x)) \cup (\text{Fam}\,h_2(x)).$$

Pues bien, se demuestra que una solución particular de (5.2a) se halla mediante una combinación lineal de los elementos de la familia de $h(x)$ y obteniendo los coeficientes o constantes indeterminadas por identificación. No lo vamos a demostrar, limitándonos a exponer los pasos del método del cálculo.

Procederemos del siguiente modo:

a) Se forma la familia de cada sumando de $h(x)$.

b) Se prescinde de aquellas familias que estén contenidas en otras.

c) Si alguna familia tuviera uno o más elementos que fueran soluciones de la ecuación homogénea correspondiente $Ly = 0$, se multiplicaría a todos los elementos de esa familia por x, ó por x^2, ó por $x^3, \ldots$, hasta que ningún elemento fuese solución de la homogénea.

d) Con las familias resultantes de la selección anterior se forma una sola familia. Se establece una combinación lineal de sus elementos, con coeficientes indeterminados. Esta combinación lineal va a ser solución particular de la ecuación no homogénea $Ly = h(x)$, de modo que sustituyéndola, junto con sus derivadas, en Ly, se procede después a identificar los coeficientes con los de $h(x)$. Hallamos así las constantes indeterminadas.

Ejemplo:

Queremos hallar la solución general de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = 3 + 2x + e^x.$$

La solución general de la homogénea es

$$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

El segundo miembro de la ecuación contiene los tipos de funciones elementales aptos para aplicar el método anterior. De modo que para encontrar una solución particular de la ecuación dada hallaremos las familias de cada término de $h(x)$, y tenemos:

$$\text{Fam}\,(3) = \text{Fam}\,(x^0) = \{1\}; \text{Fam}\,(x) = \{1, x\}; \text{Fam}\,(e^x) = \{e^x\}.$$

Como $\text{Fam}\,(x^0) \subset \text{Fam}\,(x)$, prescindimos de la primera. El único elemento de la familia de e^x es solución de la homogénea, por lo cual le multiplicaremos por x. Nos queda la unión $\{1, x, xe^x\}$, con cuyos elementos establecemos la suma

$$y_P = A + Bx + Cxe^x,$$

donde A, B y C son coeficientes indeterminados. Derivemos dos veces:

$$y'_P = B + Ce^x + Cxe^x;\ y''_P = 2Ce^x + Cxe^x.$$

Sustituyendo estas expresiones de y_P, y'_P, y''_P en el primer miembro de la ecuación, e identificando coeficientes, resulta: $A = 3, B = 1, C = -1$. La solución particular que nos da este método es, pues: $y_P = 3 + x - xe^x$. La solución general de la ecuación será:

$$y = y_H + y_P = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x + x + 3.$$

6. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

6.1. Sistemas homogéneos

Supongamos que un problema de Física o de tecnología nos conduce a la necesidad de conocer dos funciones $y = y(x), z = z(x)$ de las cuales no sabemos más que están relacionadas por medio de las dos ecuaciones siguientes:

$$y'' + z' = 0$$

$$y' - 2y + z'' - 2z' = 0.$$

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales y homogéneas, con coeficientes constantes, cuyas incógnitas, claro es, son las funciones $y(x), z(x)$. Haciendo patente el operador $D = d/dx$, el sistema puede escribirse así:

$$\begin{cases} D^2 y + Dz = 0 \\ (D-2)y + (D^2 - 2D)z = 0 \end{cases}$$

La función $y(x)$ está afectada por los operadores $L_1 = D^2$ y $L_3 = D - 2$; la función $z(x)$ lo está por los operadores $L_2 = D$ y $L_4 = D^2 - 2D$.

De una manera general, un sistema homogéneo de dos ecuaciones diferenciales con dos funciones incógnitas y, z, viene expresado por

$$\left.\begin{aligned} L_1 y + L_2 z &= 0 \\ L_3 y + L_4 z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6.1a)$$

Supondremos en adelante que L_1, L_2, L_3 y L_4 son operadores lineales con coeficientes constantes y, por lo tanto, conmutativos.

En este sistema podemos eliminar z si hacemos actuar sobre los dos miembros de la primera ecuación al operador L_4, y sobre los dos miembros de la segunda al operador $-L_2$, y sumamos después. Tendremos:

$$\begin{cases} L_4(L_1 y + L_2 z) = L_4(L_1 y) + L_4(L_2 z) = 0 \\ -L_2(L_3 y + L_4 z) = -L_2(L_3 y) - L_2(L_4 y) = 0 \end{cases}$$

Como estos L son conmutativos, es $L_4(L_2 z) = L_2(L_4 z)$. De modo que si sumamos miembro a miembro, nos queda (suprimimos los paréntesis):

$$L_4 L_1 y - L_2 L_3 y = 0.$$

Por la misma conmutatividad, y por la definición de suma de operadores dada en el apartado 4.2, será:

$$(L_1 L_4 - L_2 L_3) y = 0,$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes, y podemos integrarla encontrando las raíces de la ecuación característica. El operador que actúa sobre y puede ser puesto en forma de determinante, y entonces la ecuación queda así:

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = 0.$$

De modo análogo, si en el sistema (6.1a) eliminamos la función y haciendo actuar a los operadores $-L_3$ y L_1 sobre las ecuaciones primera y segunda respectivamente, sumando después, obtendremos una ecuación en z homogénea, y con *el mismo operador*

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix},$$

que formalmente no es otra cosa que el determinante Δ del sistema (6.1a).

Hemos llegado, por lo tanto, a dos ecuaciones, una en y y otra en z, que son $\Delta y = 0; \Delta z = 0$. Ahora bien, estas ecuaciones provienen de un sistema que no es el (6.1a); es otro que hemos formado aplicando a las ecuaciones de (6.1a) nuevos operadores L, con lo cual hemos introducido derivadas de mayor orden que las que figuran en

(6.1a). Así, pues, las soluciones particulares que satisfacen a (6.1a) satisfarán también al otro sistema, pero no todas las de este último serán soluciones del primero.

Hallemos la solución general de $\Delta y = 0$, que tendrá tantas constantes arbitrarias como orden tenga el operador Δ. También la solución general de $\Delta z = 0$ tiene ese mismo número de constantes, *pero no las mismas constantes*. Si la solución general de $\Delta y = 0$ es

$$y = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_m u_m(x),$$

la de $\Delta z = 0$ será

$$z = d_1 u_1(x) + d_2 u_2(x) + \ldots + d_m u_m(x),$$

donde las c y las d son cosntantes arbitrarias, y $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$ las m soluciones obtenidas de las raíces de la ecuación característica común $\Delta = 0$, y serán las mismas para ambas integrales generales. Pero como no todas las soluciones particulares deducidas dando valores a las c y a las d satisfacen al sistema (6.1a), habremos de seleccionarlas para quedarnos sólo con aquellas que le satisfagan. Bastará llevar las expresiones

$$y = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x), \quad z = \sum_{k=1}^{m} d_k u_k(x),$$

y las de sus derivadas, al propio sistema (6.1a), y obtendremos las constantes d en función de las c, o al contrario. Puede ser suficiente llevar tales expresiones a una sola de las ecuaciones de (6.1a), si los operadores L de esa ecuación no poseen factores comunes.

Veamos el ejemplo con el que empezamos este apartado. Se trata de hallar la solución general del sistema

$$\left.\begin{aligned} y'' + z' &= 0 \\ y' - 2y + z'' - 2z' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.1b}$$

que puede escribirse también así:

$$\begin{cases} D^2 y + Dz = 0 \\ (D-2)y + (D^2 - 2D)z = 0 \end{cases}$$

donde es:

$$D^2 = L_1,\ D = L_2,\ D - 2 = L_3,\ D^2 - 2D = L_4.$$

Integremos una cualquiera de las dos ecuaciones $\Delta y = 0$, ó $\Delta z = 0$ (formalmente son la misma), siendo

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D^2 & D \\ D-2 & D^2 - 2D \end{vmatrix} = D(D+1)(D-1)(D-2).$$

Las raíces de la ecuación característica $\Delta = 0$ son, pues:

$$r_1 = 0,\ r_2 = -1,\ r_3 = 1,\ r_4 = 2.$$

Por lo tanto, tenemos la base

$$\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = \{1, e^{-x}, e^{x}, e^{2x}\}.$$

La solución general de $\Delta y = 0$ es:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{2x}$$

La de $\Delta z = 0$ será la misma, pero con otras constantes:

$$z = d_1 + d_2 e^{-x} + d_3 e^{x} + d_4 e^{2x}.$$

Derivando dos veces ambas expresiones, y llevándolo todo a las dos ecuaciones de (6.1b), resulta:

$$c_1 = 0,\ c_2 = d_2,\ c_3 = -d_3,\ c_4 = -\frac{1}{2} d_4.$$

En este ejemplo tenemos que utilizar las dos ecuaciones del sistema, y no una sola de ellas, porque los operadores $L_1 = D^2$ y $L_2 = D$ de la primera ecuación tiene el factor común D; y los $L_3 = D - 2$ y $L_4 = D^2 - 2D$ de la segunda tienen el factor $D - 2$.

La solución general del sistema (6.1b) es, pues:

$$y = d_2 e^{-x} - d_3 e^{x} - \frac{1}{2} d_4 e^{2x}$$
$$z = d_1 + d_2 e^{-x} + d_3 e^{x} + d_4 e^{2x}.$$

y tiene cuatro constantes arbitrarias.

La generalización al caso de un sistema de más de dos ecuacioness (y, por lo tanto, más de dos funciones) no ofrece ninguna dificultad, haciendo intervenir a los operadores L como hemos hecho hasta aquí.

6.2. Sistemas no homogéneos

Un sistema no homogéneo de dos ecuaciones con dos funciones desconocidas $y(x)$, $z(x)$ puede ponerse en la forma

$$\left.\begin{aligned} L_1 y + L_2 z &= g(x) \\ L_3 y + L_4 z &= h(x) \end{aligned}\right\}, \qquad (6.2a)$$

donde los operadores L son lineales con coeficientes constantes.

Podemos eliminar z e y como lo hemos hecho en los sistemas homogéneos, haciendo actuar sobre cada ecuación de (6.2a) los operadores convenientes. Lo mismo que antes, llegamos así a dos ecuaciones diferenciales lineales, pero esta vez no homogéneas: $\Delta y = \Delta_y$; $\Delta z = \Delta_z$, que podemos integrar. Aquí, Δ es el determinante–operador del sistema; es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1 L_4 - L_2 L_3.$$

Los determinantes Δ_y y Δ_z son

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} g(x) & L_2 \\ h(x) & L_4 \end{vmatrix} = L_4 g(x) - L_2 h(x) = G(x);$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} L_1 & g(x) \\ L_3 & h(x) \end{vmatrix} = L_1 h(x) - L_3 g(x) = H(x).$$

Si la solución general de $\Delta y = G(x)$ es

$$y = y_P + y_H = y_p + \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x),$$

la de $\Delta z = H(x)$ será

$$z = z_P + z_H = z_P + \sum_{k=1}^{m} d_k u_k(x),$$

donde c_k son las constantes de la solución general de $\Delta y = 0$, y y_P una solución particular de $\Delta y = G(x)$. Las d_k son las constantes de la solución general de $\Delta z = 0$, y z_P una solución particular de $\Delta z = H(x)$.

Ahora bien, no todas las soluciones particulares de $\Delta y = G(x)$ y de $\Delta z = H(x)$ obtenidas dando valores a las c_k y a las d_k sastifacen al sistema (6.2a), por la misma razón que la expuesta en los sistemas homogéneos. Por lo tanto, llevaremos a las dos ecuaciones de (6.2a) las expresiones

$$y = y_P + \sum_{1}^{m} c_k u_k(x),$$

$$z = z_P + \sum_{1}^{m} d_k u_k(x)$$

y las de sus derivadas, con lo cual obtendremos unas relaciones entre las c_k y las d_k.

Ejemplo:

Tratemos de hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} y' + z' = e^x \\ y + z'' = x, \end{cases}$$

que puede escribirse así:

$$\begin{cases} Dy + Dz = e^x \\ y + D^2 z = x. \end{cases}$$

El determinante operador del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & D \\ 1 & D^2 \end{vmatrix} = D^3 - D.$$

Los determinantes Δ_y y Δ_z son:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} e^x & D \\ x & D^2 \end{vmatrix} = D^2 e^x - Dx = e^x - 1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} D & e^x \\ 1 & x \end{vmatrix} = Dx - e^x = 1 - e^x.$$

Tenemos que integrar las ecuaciones $\Delta y = \Delta_y$ y $\Delta z = \Delta_z$; es decir:

$$y''' - y' = e^x - 1,$$

$$z''' - z' = 1 - e^x.$$

Resolveremos primero las homogéneas, que formalmente son una misma. Las raices de $\Delta = 0$ son $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, $r_3 = 1$. Por lo tanto, tres soluciones linealmente independientes de ambas homogéneas serán: $u_1(x) = 1, u_2(x) = e^{-x}, u_3(x) = e^x$. La solución general de $y''' - y' = 0$ es pues:

$$y_H = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x.$$

La de $z''' - z' = 0$ tendrá constantes distintas:

$$z_H = d_1 + d_2 e^{-x} + d_3 e^x.$$

Hallemos ahora una solución particular de $y''' - y' = e^x - 1$ y otra de $z''' - z' = 1 - e^x$ utilizando, por ejemplo, el método de las familias (apartado 5.2). Aquí ocurre que

$$\text{Fam}(e^x - 1) = \text{Fam}(1 - e^x) = \text{Fam}(1) \cup \text{Fam}(e^x) = \{1\} \cup \{e^x\}.$$

Pero tanto 1 como e^x son soluciones de las homogéneas $\Delta y = 0$ y $\Delta z = 0$. Será suficiente multiplicar por x a estos elementos, y tendremos: $\{x\} \cup \{xe^x\} = \{x, xe^x\}$, que es la familia final y, en este ejemplo, es común a las dos ecuaciones $\Delta y = \Delta_y$, $\Delta z = \Delta_z$. Una solución particular y_P de $y''' - y' = e^x - 1$ será $y_P = Ax + Bxe^x$, que sustituiremos en la ecuación para hallar los coeficientes indeterminados A y B por identificación. De la misma manera, una solución particular de $z''' - z' = 1 - e^x$ es de la forma $z_P = Mx + Nxe^x$, y los coeficientes M y N se hallan por identificación. Resulta

$$y_P = x + \frac{1}{2}xe^x = -z_P.$$

Las soluciones generales de las ecuaciones $\Delta y = \Delta_y$ y $\Delta z = \Delta_z$ son respectivamente:

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x + x + \frac{1}{2}xe^x;$$

$$z = d_1 + d_2 e^{-x} + d_3 e^x - x - \frac{1}{2}xe^x.$$

que sustituidas en las dos ecuaciones del sistema dado nos conducen a $c_1 = 0, c_2 = -d_2, c_3 = 1 - d_3$. Por lo tanto, la solución general de dicho sistema es:

$$y = -d_2 e^{-x} + (1 - d_3)e^x + x + \frac{1}{2}xe^x$$

$$z = d_1 + d_2 e^{-x} + d_3 e^x - x - \frac{1}{2}xe^x.$$

Decimos aquí lo mismo que en el apartado anterior: la generalización al caso de sistemas lineales no homogéneos con más de dos ecuaciones de coeficientes constantes no ofrece dificultad.

6.3. Sistema equivalente a una ecuación lineal

Sea la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes variables:

$$y^{(n} + a_1(x)y^{(n-1} + a_2(x)y^{(n-2} + \dots$$
$$\dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = h(x). \qquad (6.3a)$$

A las funciones desconocidas $y, y', y'', \dots, y^{(n-2}, y^{(n-1}$ les vamos a llamar de otra manera. Haremos

$$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, \dots, y^{(n-2} = y_{n-1}, y^{(n-1} = y_n,$$

con lo cual, despejando $y^{(n}$ en (6.3a), será:

$$y^{(n} = -a_n(x)y_1 - a_{n-1}(x)y_2 - a_{n-2}(x)y_3 - \dots$$
$$\dots \quad -a_2(x)y_{n-1} - a_1(x)y_n + h(x).$$

Si derivamos las igualdades anteriores, excepto $y^{(n}$, tendremos estas otras:

$$y' = y'_1, y'' = y'_2, y''' = y'_3, \dots, y^{(n-1} = y'_{n-1}, y^{(n} = y'_n,$$

que al compararlas con las primeras resulta:

$$\left.\begin{aligned} &y'_1 = y_2 \\ &y'_2 = y_3 \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ &y'_{n-1} = y_n \\ &y'_n = -a_n(x)y_1 - a_{n-1}(x)y_2 - \dots - a_2(x)y_{n-1} - a_1(x)y_n + h(x) \end{aligned}\right\} \qquad (6.3b).$$

Se trata de un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales de primer orden, cuyas funciones desconocidas son $y_1, y_2, \dots, y_n$. Este sistema es equivalente a la ecuación (6.3a).

Podemos poner (6.3b) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \dots\dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots\dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots\dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots\dots 0 & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & -a_{n-3}(x) \dots\dots -a_2(x) & -a_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ h(x) \end{bmatrix}$$

o sea: $Y' = AY + B$.

Si consideramos a $y_1, y_2, \dots, y_n$ como las componentes de un vector $\vec{y}(x)$, y análogamente $0, 0, \dots, 0$, $h(x)$ como las de un vector $\vec{b}(x)$, la ecuación matricial anterior equivale a la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}. \qquad (6.3c)$$

Problema de valores iniciales en una ecuación lineal de orden n

Dada una ecuación como la (6.3a), cabe proponerse el problema de hallar la curva integral que cumple las siguientes n condiciones:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1}(x_0) = y_{0(n-1)}.$$

Es decir, se conoce lo que vale la función en un punto x_0 y lo que valen en ese mismo punto las $n-1$ primeras derivadas de dicha función. Habrá que averiguar primero si existe una función o solución particular de (6.3a) que cumpla tales condiciones. Podemos transferir entonces el teorema de existencia y unicidad relativo a la ecuación (6.3a) al de su sistema equivalente (6.3b) y, por lo tanto, al estudio de la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación vectorial de primer orden (6.3c). Esta ecuación (6.3c) está incluida en las de la forma $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$, que se corresponde con la escalar $y' = f(x, y)$, para la cual demostramos anteriormente (parágrafo 2) el teorema de existencia y unicidad.

No vamos a demostrar el teorema de existencia para la ecuación vectorial. Pero su conclusión, proyectada a la ecuación lineal (6.3a), es la siguiente: Si los coeficientes $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ son funciones continuas en $I \subset \mathbb{R}$, y la función $h(x)$ del segundo miembro es también continua en I, y si $x_0 \in I$, existe una solución particular de (6.3a), y sólo una, que satisface las condiciones

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1}(x_0) = y_{0(n-1)}.$$

Por lo tanto, las n constantes de la solución general de (6.3a) quedan unívocamente determinadas por dichas condiciones. Esto último se comprueba fácilmente: la solución general de (6.3a) es de la forma

$$y = \lambda_1 u_1(x) + \lambda_2 u_2(x) + \ldots + \lambda_n u_n(x) + y_P(x),$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son n soluciones particulares de la homogénea, linealmente independientes, $y_P(x)$ una solución particular de (6.3a) y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n constantes arbitrarias. Derivando $n-1$ veces esta expresión de y, y llevando a las expresiones de y y de sus $n-1$ derivadas las n condiciones establecidas anteriormente, tendremos un sistema lineal en las λ de n ecuaciones. El determinante de tal sistema es el wronskiano de las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$, que será distinto de cero en I por ser las u linealmente independientes. Así, pues, las λ quedan unívocamente determinadas.

Ejemplo:

Hallar la curva integral de la ecuación $xy'' + y' = x^2$ que pasa por el punto $(1, 10/9)$ y cuya pendiente en ese punto es $7/3$.

Pondremos la ecuación en la forma reducida

$$y'' + \frac{1}{x}y' = x.$$

El coeficiente de y' es una función continua en toda la recta real excepto en $x = 0$; la función del segundo miembro es continua $\forall x \in \mathbb{R}$. El punto $x_0 = 1$ de las condiciones iniciales pertenece al intervalo de continuidad de ambas funciones. Existe, pues, una solución particular de la ecuación dada, y sólo una, que cumple las condiciones

$$y(1) = \frac{10}{9},\ y'(1) = \frac{7}{3}.$$

La ecuación que nos dan no es de coeficientes constantes, pero es fácilmente integrable, pues haciendo $y' = z$ se reduce a una de primer orden:

$$z' + \frac{1}{x}z = x,$$

cuya solución general (parágrafo 3) es:

$$z = \frac{1}{q}\int qx\,dx + \frac{c_1}{x},$$

donde

$$q = e^{\int \frac{dx}{x}} = x.$$

Nos queda

$$z = \frac{1}{3}x^2 + c_1\frac{1}{x}.$$

Integrando z obtenemos y, que es:

$$y = \frac{1}{9}x^3 + c_1 \ln|x| + c_2.$$

Si en esta expresión y en la de su derivada sustituimos respectivamente los valores

$$x = 1,\ y = \frac{10}{9} \quad \text{y} \quad x = 1, y' = \frac{7}{3},$$

tenemos el siguiente y trivial sistema lineal en las constantes c_1 y c_2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{9} + c_2 = \frac{10}{9} \\ \frac{1}{3} + c_1 = \frac{7}{3}, \end{cases}$$

que nos da $c_1 = 2, c_2 = 1$. La curva integral pedida será, pues:

$$y = \frac{1}{9}x^3 + \ln x^2 + 1.$$

NOTA: Adviértase que las condiciones de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación lineal se refieren a la continuidad de los coeficientes y de la función del segundo miembro, y a la necesidad de que *la abscisa* de las condiciones iniciales libremente impuestas pertenezca al intervalo de continuidad, no habiendo limitaciones para los valores de $y_0, y'_0, \ldots$

7. ALGUNAS ECUACIONES NOTABLES

7.1. Ecuación de Euler

Tiene la forma siguiente:

$$x^n y^{(n} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = h(x), \qquad (7.1a)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes. Se trata de una ecuación lineal de orden n con coeficientes variables. La particularidad de estos coeficientes $a_{n-k}x^k$ es que el exponente k de x es igual al orden de la derivada a la cual multiplica dicho coeficiente.

Mediante un cambio de la variable independiente x, estas ecuaciones quedan reducidas a otras también lineales y de orden n, pero con coeficientes constantes. Vamos a verlo.

Si consideramos $x > 0$, hagamos $x = e^t$, con lo cual es $t = \ln x$ (para $x < o$ haremos $x = -e^t$), y tengamos en cuenta las derivadas sucesivas de t respecto de x :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}, \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1!}{x^2}, \frac{d^3t}{dx^3} = \frac{2!}{x^3}, \ldots.$$

Con este cambio de variable, la y de (7.1a) pasa a ser función de t, y como $t = \ln x$, resulta que y es función compuesta de x a través de la variable t. Podemos expresar las derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots.$$

que figuran en la ecuación (7.1a) en función de las derivadas sucesivas de t respecto de x utilizando la regla de la derivación de las funciones compuestas. Tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}Dy,$$

donde el operador D es ahora $D = d/dt$;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} -$$
$$- \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}(D^2 - D)y = \frac{1}{x^2}D(D-1)y;$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\left(\frac{dt}{dx}\right)^3 + 3\frac{d^2y}{dt^2}\frac{d^2t}{dx^2}\frac{dt}{dx} +$$
$$+ \frac{dy}{dt}\frac{d^3t}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{1}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{1}{x^3}\frac{dy}{dt} =$$
$$= \frac{1}{x^3}(D^3 - 3D^2 + 2D)y = \frac{1}{x^3}D(D-1)(D-2)y;$$

y en general:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{1}{x^n}D(D-1)(D-2)\ldots(D-n+1)y.$$

Así, pues, de esta expresión de $d^n y/dx^n$ se sigue:

$$x^n y^{(n} = D(D-1)(D-2)\dots(D-n+1)\,y.$$

Por lo tanto, el anterior cambio de variable hecho en una ecuación de Euler equivale a hacer en dicha ecuación las sustituciones siguientes:

$$xy' = Dy;\ x^2y'' = D(D-1)y;\ x^3y''' = D(D-1)(D-2)\,y;\dots$$

donde (repetimos) el operador D es de derivación respecto a t. En consecuencia, obtendremos una ecuación con coeficientes constantes donde la función desconocida y es función de t. Se resuelve esta ecuación y después se restituye la variable x.

Como regla práctica, *para integrar una ecuación de la forma (7.1a) haremos $x = e^t$ sólo en el segundo miembro $h(x)$; en el primero se hace las sustituciones $xy' = Dy$, $x^2y'' = D(D-1)y$, etc., con lo cual tendremos un polinomio operador en $D = d/dt$ de grado n que actúa sobre y; es decir, tendremos una ecuación diferencial lineal de orden n en $y(t)$ con coeficientes constantes.*

Ejemplo:

Vamos a hallar la solución general de la ecuación $y'' - 2x^{-2}y = x$. Multiplicando por x^2 queda

$$x^2y'' - 2y = x^3,$$

que es la forma (7.1a). Haremos $x = e^t$ en el segundo miembro ($x^3 = e^{3t}$), y en el primer miembro haremos

$$x^2y'' = D(D-1)\,y.$$

Nos queda la ecuación transformada

$$y'' - y' - 2y = e^{3t}$$

de coeficientes constantes. Las raíces de $D^2 - D - 2 = 0$ son -1 y 2. La solución general de la homogénea es, pues:

$$y_H = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t}.$$

Una solución particular de la completa puede obtenerse de la familia del segundo miembro, $\{e^{3t}\}$, que no debe ser alterada; es decir, $y_P = Ae^{3t}$. Por identificación sale $A = 1/4$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación transformada es:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t} + \frac{1}{4}e^{3t}.$$

Restituyendo la variable x tenemos:

$$y(x) = c_1\,x^{-1} + c_2\,x^2 + \frac{1}{4}x^3.$$

En una ecuación de Euler (7.1a), el operador L_x con coeficientes variables que actúa sobre la función desconocida $y(x)$ es:

$$L_x = x^nD^n + a_1x^{n-1}D^{n-1} + \dots + a_{n-2}x^2D^2 + a_{n-1}xD + a_n,$$

donde $D = d/dx$. El operador L_t con coeficientes constantes de la ecuación transformada de la (7.1a) mediante $x = e^t$ es, como ya hemos visto:

$$L_t = D(D-1)(D-2)\ldots\ldots(D-n+1) + a_1 D(D-1)(D-2)\ldots$$
$$\ldots\ (D-n+2) + \ldots + a_{n-2} D(D-1) + a_{n-1} D + a_n,$$

donde $D = d/dt$. Supongamos que la ecuación característica $L_t = 0$ tiene sus n raíces reales y desiguales, $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Entonces sabemos que n soluciones particulares linealmente independientes de la homogénea $L_t y(t) = 0$ son $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$. Pero estas soluciones son las transformadas mediante $x = e^t$ de otras de la ecuación homogénea $L_x y(x) = 0$. Estas últimas, serán, pues: $x^{r_1}, x^{r_2}, \ldots, x^{r_n}$. Obsérvese que cada una de estas soluciones se obtiene integrando, respectivamente, las ecuaciones diferenciales

$$(xD - r_1)y = 0,\ (xD - r_2)y = 0, \ldots,\ (xD - r_n)y = 0,$$

con $D = d/dx$, que son ecuaciones de Euler homogéneas de primer orden.

Se comprueba sin dificultad que el operador L_x de (7.1a) se puede poner en la forma

$$L_x = (xD - r_1)(xD - r_2)\ldots(xD - r_n),$$

siendo $r_1, r_2, \ldots, r_n$ las raíces (que hemos supuesto reales y distintas) de la ecuación característica $L_t = 0$. Los binomios operadores $xD - r_k$ son conmutativos, pero el producto formal

$$(xD - r_1)(xD - r_2) = x^2 D^2 - (r_1 + r_2)\, xD + r_1 r_2$$

no es válido al actuar sobre $y(x)$; es decir:

$$(xD - r_1)(xD - r_2)y \neq (x^2 D^2 - (r_1 + r_2)\, xD + r_1 r_2)\, y,$$

pues tenemos sucesivamente:

$$(xD - r_1)(xD - r_2)y = (xD - r_1)(xy' - r_2 y) = (xD - r_1)(xy') - (xD - r_1)(r_2 y) =$$
$$= x^2 y'' + xy' - r_1 xy' - r_2 xy' + r_1 r_2 y = x^2 y'' - (r_1 + r_2 - 1)\, xy' + r_1 r_2 y =$$
$$= (x^2 D^2 - (r_1 + r_2 - 1)\, xD + r_1 r_2)\, y.$$

En este proceso se advierte, además, la conmutatividad de $(xD - r_1)$ y $(xD - r_2)$.

Cuando se trata de operadores $k_1 D - r_1$, $k_2 D - r_2$, con k_1 y k_2 constantes, dichos operadores no sólo son conmutativos sino que, además, es válido el producto formal

$$(k_1 D - r_1)(k_2 D - r_2) = k_1 k_2 D^2 - (k_2 r_1 + k_1 r_2)D + r_1 r_2$$

al actuar sobre $y(x)$.

Resumiendo: *la solución general de la ecuación de Euler homogénea* $L_x y = 0$ *es*

$$y_H = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x^{r_k},$$

siendo r_k las n raíces de la ecuación característica $L_t = 0$, reales y distintas.

Si $L_t = 0$ tiene una raíz real múltiple r_1, tendremos soluciones particulares de $L_t\, y(t) = 0$ de la forma $t^m e^{r_1 t}$ (apartado 5.1, caso 2º). Estas soluciones son las transformadas mediante $x = e^t$ de las de la forma $(\ln x)^m x^{r_1}$ correspondientes a la ecuación homogénea $L_x\, y(x) = 0$.

Si en $L_t = 0$ hay raíces imaginarias simples $a \pm bi$, sabemos que la parte de la solución general de $L_t\, y(t) = 0$ debida a un par de conjugadas es

$$e^{at}(c_1 \cos bt + c_2 \operatorname{sen} bt);$$

luego la parte de solución general de $L_x\, y(x) = 0$ de la cual se deriva la anterior será

$$x^a[c_1 \cos(\ln x^b) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x^b)].$$

y análogamente si hay imaginarias múltiples.

Ejemplo:

Sea la ecuación de Euler homogénea

$$x^3 y''' - 2x^2 y'' + 3xy' - 3y = 0.$$

La ecuación característica de su transformada mediante $x = e^t$ es

$$D(D-1)(D-2) - 2D(D-1) + 3D - 3 = 0.$$

que queda así:

$$(D-1)^2(D-3) = 0.$$

Hay una raíz doble real $r_1 = r_2 = 1$ y otra simple $r_3 = 3$. Por lo tanto, según lo explicado anteriormente, la solución general de la ecuación dada será:

$$y = x(c_1 + c_2 \ln x) + c_3 x^3.$$

Finalmente, una ecuación de Euler puede tener también la forma siguiente:

$$(px+q)^n y^{(n} + a_1(px+q)^{n-1} y^{(n-1} + \ldots + a_{n-1}(px+q)y' + a_n y = h(x).$$

Se reduce a otra de coeficientes constantes haciendo el cambio $px + q = e^t$.

7.2. Ecuación de Bernouilli

Es una ecuación no lineal de primer orden que tiene la forma

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0 \qquad (7.2a)$$

Si fuese $n = 0$, tendríamos una ecuación lineal completa. Si fuese $n = 1$, tendríamos una lineal homogénea (ambas, claro es, de primer orden). Supondremos, pues, que n es distinto de cero y de la unidad.

Dividamos (7.2a) por y^n, con lo cual nos queda

$$\frac{1}{y^n}y' + \frac{1}{y^{n-1}}a(x) + b(x) = 0 \qquad (7.2b)$$

Hagamos el siguiente cambio de función: $y^{1-n} = u$. Derivemos esto, y será: $(1-n)y^{-n}y' = u'$, de donde

$$y' = \frac{1}{1-n}y^n u'.$$

Llevemos a (7.2b) estas expresiones de y' e y^{1-n}, y tendremos:

$$\frac{1}{1-n}u' + a(x)u + b(x) = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden. Se pone en la forma ordinaria

$$u' + (1-n)a(x)u + (1-n)b(x) = 0,$$

se integra y se restituye después la función y.

Vemos cómo una ecuación de Bernouilli se reduce a otra lineal por medio del anterior cambio de función.

Ejemplo:

La ecuación $xy' + y + x^2y^3 = 0$, dividida por x, toma la forma (7.2a):

$$y' + \frac{1}{x}y + xy^3 = 0.$$

Dividimos por y^3 :

$$\frac{1}{y^3}y' + \frac{1}{y^2}\frac{1}{x} + x = 0.$$

Hacemos $1/y^2 = u$; derivamos:

$$-\frac{2}{y^3}y' = u';$$

o sea,

$$y' = -1/2y^3u'.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Bernouilli, pero después de haber dividido por y^3, obtenemos la ecuación lineal

$$u' - \frac{2}{x}u = 2x,$$

cuya solución general es, como ya sabemos,

$$u = \frac{1}{q}\int 2qx\,dx + \frac{C}{q},$$

donde

$$q = e^{-2\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^2}.$$

Por lo tanto, será:

$$u = x^2\int \frac{2dx}{x} + Cx^2 = x^2(\ln x^2 + C).$$

Restituyendo la función y queda:

$$x^2y^2(\ln x^2 + C) = 1.$$

7.3. Ecuación de Riccati

Es una ecuación no lineal de primer orden, de grado 2 en y, que tiene la forma

$$y' + a(x)y^2 + b(x)y + c(x) = 0. \tag{7.3a}$$

Esta ecuación no puede ser resuelta por cuadraturas, a menos que se conozca una solución particular de ella, en cuyo caso, mediante un cambio de la función y, se reduce a una de Bernouilli.

Supongamos que concemos una solución particular $y_1(x)$ de (7.3a). Hagamos $y = y_1 + u$. Entonces, la ecuación (7.3a) se transforma en

$$u' + a(x)u^2 + (2a(x)y_1 + b(x))u + y_1^2 a(x) + y_1 b(x) + c(x) + y'_1 = 0.$$

La suma de los cuatro últimos términos es idénticamente nula, puesto que y_1 satisface a (7.3a). Tendremos, pues:

$$u' + a(x)u^2 + (2a(x)y_1 + b(x))u = 0,$$

que es una ecuación de Bernouilli. Dividamos por u^2;

$$\frac{1}{u^2}u' + \frac{1}{u}(2a(x)y_1 + b(x)) + a(x) = 0.$$

Hagamos $1/u = z$, con lo cual es

$$\frac{1}{u^2}u' = -z'.$$

Entonces tenemos:

$$z' - (2a(x)y_1 + b(x))z - a(x) = 0. \tag{7.3b}$$

Como sabemos (apartado 3.1), esta ecuación lineal requiere dos cuadraturas para llegar a la solución general. Después habrá que deshacer los cambios para restituir la función y.

Es claro que, conociendo y_1, hemos podido hacer en (7.3a) el único cambio $y = y_1 + 1/z$, llegando directamente a la ecuación (7.3b).

Si conociéramos dos soluciones particulares y_1, y_2 de (7.3a) nos bastaría una sola cuadratura para obtener la integral general. En efecto: la función

$$z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

es una solución particular de la ecuación (7.3b), pues sustituyendo en ella esta expresión de z_1 y la de su derivada

$$z'_1 = \frac{y'_1 - y'_2}{(y_2 - y_1)^2},$$

el primer miembro de (7.3b) queda así, después de simplificar:

$$y'_1 + a(x)y_1^2 + b(x)y_1 - \left(y'_2 + a(x)y_2^2 + b(x)y_2\right).$$

Pero como y_1 e y_2 son soluciones particulares de (7.3a), esto se reduce a $c(x)-c(x)=0$. Es decir, conocer dos soluciones de la ecuación de Riccati equivale a conocer una solución de la ecuación lineal transformada (7.3b) y, por lo tanto, es suficiente una cuadratura para obtener la solución general de esta última.

Si conociéramos tres soluciones particulares de (7.3a), no sería necesaria ninguna cuadratura para llegar a su solución general.

Ejemplo:

Una ecuación de Riccati es

$$x^2y' + x^3y^2 = x - 1,$$

o bien:

$$y' + xy^2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

Salta a la vista que una solución particular es $y_1 = 1/x$ (basta observar el segundo miembro de la ecuación). Haremos el único cambio $y = 1/x + 1/z$; por lo tanto,

$$y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xz}, \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}.$$

Sustituyendo, nos queda: $z' + 2z = x$, cuya solución general es

$$z = Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

Deshaciendo el cambio y despejando y, tenemos:

$$y = \frac{Ce^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}}{Cxe^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x},$$

que es la solución general de la ecuación dada.

NOTA: Es fácil ver que la integral general de una ecuación de Riccati tiene la forma

$$y = \frac{Cf(x) + g(x)}{C\varphi(x) + \gamma(x)},$$

partiendo del conocimiento de una solución particular. Si damos a x un valor perteneciente al campo de definición de f, g, φ y γ, la expresión anterior se convierte en

$$y(C) = \frac{pC + q}{rC + s},$$

donde p, q, r y s son números. Entonces, a cada valor de C le corresponde uno de $y(C)$. Esta correspondencia es una transformación homográfica y, como tal, deja invariable la razón doble de las cuaternas de C y de $y(C)$. Es decir, que si C_1, C_2, C_3, C_4 son cuatro valores arbitrarios de C, la razón doble (C_1, C_2, C_3, C_4) es igual a la razón doble (y_1, y_2, y_3, y_4) de los correspondientes valores de $y(C)$.

7.4 Ecuación de Lagrange

Es una ecuación de primer orden, lineal en x y en y. Tiene la forma

$$y = x\,F(y') + G(y'). \tag{7.4a}$$

Derivemos respecto de x y conservemos la notación $y'' = dy'/dx$. Será:

$$y' = F(y') + x\frac{dF}{dy'}\frac{dy'}{dx} + \frac{dG}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

o bien:

$$y' - F(y') = (xF'(y') + G'(y'))\frac{dy'}{dx}.$$

Si hacemos $y' = p$ tenemos:

$$p - F(p) = (xF'(x) + G'(p))\frac{dp}{dx} \tag{7.4b}$$

Puesto que $p = y'(x)$ y $x = y'^{-1}(p)$ son funciones inversas, será

$$\frac{dp}{dx}\frac{dx}{dp} = 1;$$

de modo que si dividimos (7.4b) por dp/dx, nos quedará:

$$(p - F(p))\frac{dx}{dp} = xF'(p) + G'(p),$$

que es una ecuación lineal de primer orden cuya función desconocida es x y la variable independiente es p. La podemos escribir:

$$x' - \frac{F'(p)}{p - F(p)}x = \frac{G'(p)}{p - F(p)}, \tag{7.4c}$$

y sabemos integrarla. Su solución general es de la forma $x = c\,u(p) + v(p)$. Tenemos así la expresión de x en función de un parámetro p y de una constante arbitraria c. Pero también tenemos la expresión de y en función del mismo parámetro p si en la ecuación (7.4a) ponemos directamente $y' = p$. Por lo tanto, las curvas integrales de (7.4a) vienen dadas por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= c\,u(p) + v(p) \\ y &= x\,F(p) + G(p) \end{aligned}\right\}$$

en las cuales a cada valor de c le corresponde una curva integral expresada paramétricamente.

Este procedimiento seguido para resolver la ecuación de Lagrange mediante la introducción de un parámetro, después de derivar, se aplica también a otras ecuaciones diferenciales, y se le conoce como "método de integración por derivación".

Obsérvese que en el proceso anterior hemos dividido (7.4b) por dp/dx; pero si esta derivada fuera idénticamente nula, sería $p = constante$. En tal caso, (7.4b) se reduciría a $p - F(p) = 0$, y los valores de p que habría que tener en cuenta serían las raíces de esta ecuación $p - F(p) = 0$. Ello quiere decir que también son soluciones de la ecuación de Lagrange las rectas

$$y = xF(p_1) + G(p_1),\ y = xF(p_2) + G(p_2), \ldots,$$

donde $p_1, p_2, \ldots$ son las raíces reales de $p - F(p) = 0$.

Finalmente, debemos observar también que en (7.4c) aparece $p - F(p)$ como denominador, y habrá que considerar el caso en que $p - F(p)$ sea idénticamente nulo, lo cual nos lleva a la llamada ecuación de Clairaut, que estudiaremos después.

Ejemplo:

Vamos a integrar la ecuación de Lagrange

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right) y'^2 + y'.$$

Derivemos:

$$y' = y'^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right) 2\, y' \frac{dy'}{dx} + \frac{dy'}{dx}.$$

Hagamos $y' = p$. Será:

$$p = p^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right) p \frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}.$$

Dividamos por dp/dx:

$$(p - p^2)\frac{dx}{dp} = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) p + 1,$$

que es una ecuación lineal de primer orden en $x(p)$. Podemos escribirla así:

$$x' + \frac{2}{p-1} x = \frac{1}{p}.$$

Su solución general se obtine como ya dijimos en el parágrafo 3, y es

$$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{1}{2}p^2 - 2p + \ln|p|\right) + \frac{C}{(p-1)^2}.$$

Si en la ecuación original dada hacemos $y' = p$, tendremos y en función de p. Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de las curvas integrales de la ecuación de Lagrange serán:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(\dfrac{1}{2}p^2 - 2p + \ln|p| + C\right) \\ y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)p^2 + p. \end{cases}$$

Además, hay que tener en cuenta las raíces reales de $p - p^2 = 0$, que son 0 y 1, y sustituirlas sucesivamente en la última expresión de y. Así, pues, también son soluciones de la ecuación de Lagrange las rectas

$$y = 0$$
$$y = x + \frac{1}{2}.$$

7.5. Ecuación de Clairaut

Supongamos que en la ecuación (7.4b) del apartado anterior sea $p - F(p)$ idénticamente nulo. Es tanto como suponer que lo sea $y' - F(y')$, en cuyo caso será $F(y') = y'$. Entonces, la ecuación de Lagrange (7.4a) se reduce a

$$y = xy' + G(y'), \tag{7.5a}$$

que es la llamada ecuación de Clairaut. La integramos también por derivación. Derivémosla:

$$y' = y' + x\frac{dy'}{dx} + G'(y')\frac{dy'}{dx};$$

o sea:

$$(x + G'(y'))\frac{dy'}{dx} = 0,$$

lo cual implica $dy'/dx = 0$, o bien $x + G'(y') = 0$. En el primer caso será $y' = c$, y la ecuación (7.5a) queda ya integrada, pues la familia uniparamétrica de rectas

$$y = cx + G(c) \tag{7.5b}$$

es solución.

Veamos la segunda posibilidad: $x + G'(y') = 0$. Si consideramos a y' como un parámetro p, tenemos ya la ecuación paramétrica $x = -G'(p)$, y también la y en función de p, que es la misma (7.5a). Así, pues, la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{aligned} x &= -G'(p) \\ y &= xp + G(p) \end{aligned}\right\} \tag{7.5c}$$

es también solución de la ecuación de Clairaut. Además, esta curva (7.5c) es la envolvente de las rectas de la familia (7.5b). Como sabemos, si $f(x, y, c) = 0$ es la ecuación de una familia de curvas con un parámetro (c), la envolvente de las curvas de esa familia, y sólo la envolvente, viene dada por

$$\begin{cases} f(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial c} f(x, y, c) = 0, \end{cases}$$

siempre que una de las dos derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, o ambas, sea finita y no nula para cada par (x, y) que verifique el sistema anterior. En nuestro caso, la envolvente de las rectas (7.5b) viene determinada por

$$\begin{cases} y - cx - G(c) = 0 \\ -x - G'(c) = 0, \end{cases}$$

que son las mismas ecuaciones (7.5c); el símbolo del parámetro es indiferente. Además, las derivadas parciales de $f(x, y, c) = y - cx - G(c)$ son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -c\,, \frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

con lo cual se cumple la condición necesaria para que las ecuaciones de (7.5c) determinen solamente la envolvente de las rectas (7.5b).

Ejemplo:

Sea la ecuación de Clairaut

$$y = xy' - \frac{1}{2}y'^2.$$

Hagamos $y' = p$. Tendremos $y = xp - 1/2p^2$. Derivemos respecto a x:

$$y' \equiv p = p + x\frac{dp}{dx} - p\frac{dp}{dx},$$

o sea: $(x - p)\,dp/dx = 0$. Si es $dp/dx = 0$, será $p = c$, es decir, $y' = c$. Entonces nos queda la familia de rectas $y = cx - 1/2c^2$, que es solución de la ecuación dada. Si $x - p = 0$, será:

$$\begin{cases} x = p \\ y = xp - \frac{1}{2}p^2. \end{cases}$$

envolvente en paramétricas de las rectas anteriores. Si eliminamos p, tenemos la ecuación ordinaria de la envolvente, que es la parábola

$$y = \frac{1}{2}x^2,$$

solución también de la ecuación de Clairaut.

8. OTROS TIPOS ESPECIALES DE ECUACIONES

A veces es posible integrar ecuaciones en las cuales se dan circustancias especiales; por ejemplo, si sólo aparecen dos derivadas de órdenes consecutivos en una ecuación lineal donde no figura la función desconocida; o si es una ecuación de la forma $P(y') = 0$, siendo P un polinomio, etc.

Empezaremos viendo casos especiales de ecuaciones de primer orden, en su forma general implícita $f(x, y, y') = 0$, cuando no son lineales, pues estas últimas fueron ya estudiadas en el parágrafo 3.

8.1. Ecuaciones de primer orden

Consideraremos los siguientes casos:

Caso 1°) En $f(x, y, y') = 0$ *faltan la x y la y.*

La ecuación es de la forma $f(y') = 0$. Supongamos que esta ecuación tiene una raiz real $y' = r$. Integrando será $y = rx + c$; o bien, $r = y - c/x$. Y como r satisface a $f(y') = 0$, por ser una raíz, la satisfará $y - c/x$. Es decir:

$$f\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$$

es solución. Para cualquiera otra raíz llegaremos al mismo resultado. Si una raíz es cero, la integral $y = rx + c$ se reduce a $y = c$, que es solución.

Ejemplos:

a) La ecuación

$$(y' - 1)^2 = |y'| - 1$$

tiene la raíz real $y' = 2$; luego $y = 2x + c$, o sea $2 = y - c/x$. La integral general será

$$\left(\frac{y-c}{x} - 1\right)^2 = \left|\frac{y-c}{x}\right| - 1.$$

b) La ecuación

$$y'^2 - 2y' - 3 = 0$$

tiene las raíces 1 y 3. Con cualquiera de ellas se llega a la solución general:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y-c}{x}\right) - 3 = 0.$$

Caso 2º) En $f(x, y, y') = 0$ *falta la* x.

Tendremos una ecuación de la forma $f(y, y') = 0$. Lo más conveniente es expresar los argumentos y e y' en función de un parámetro λ. Es decir: $y = g(\lambda)$, $y' = h(\lambda)$, de tal modo que eliminando λ nos quede $f(y, y') = 0$. Puesto que es $dy = y'dx$, será:

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{g'(\lambda)\,d\lambda}{h(\lambda)}.$$

Entonces tendremos:

$$x = \int \frac{g'(\lambda)\,d\lambda}{h(\lambda)} + c.$$

Esta expresión de x, junto con $y = g(\lambda)$, constituyen la familia de curvas integrales de $f(y, y') = 0$ en forma paramétrica.

Se puede tomar como parámetro y' si en $f(y, y') = 0$ logramos despejar y.

Ejemplo:

Tratemos de integrar la ecuación

$$y - 1 - \ln(y' + 1) = 0.$$

Si hacemos $y - 1 = \ln \lambda$, será

$$\ln \lambda = \ln(y' + 1) \Rightarrow \lambda = y' + 1,$$

o bien $y' = \lambda - 1$.

Tenemos ya las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} y = 1 + \ln \lambda = g(\lambda) \\ y' = \lambda - 1 = h(\lambda). \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$x = \int \frac{g'(\lambda)}{h(\lambda)}\, d\lambda = \int \frac{d\lambda}{\lambda(\lambda - 1)} = \ln c \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right),$$

donde hemos puesto la constante de integración en la forma $\ln c$.

Las ecuaciones paramétricas de la familia de curvas integrales de la ecuación dada son, pues:

$$\begin{cases} x = \ln c\,(1 - \frac{1}{\lambda}) \\ y = 1 + \ln \lambda \end{cases}$$

Hemos podido utilizar como parámetro la propia y', puesto que la ecuación puede resolverse en y. O sea, haciendo $y' = \lambda$ será:

$$y = 1 + \ln(\lambda + 1)$$

Entonces,

$$x = \int \frac{\frac{1}{\lambda + 1}}{\lambda}\, d\lambda = \ln c\, \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

Estas ecuaciones paramétricas son las mismas de antes, pues basta considerar como parámetro $\mu = \lambda + 1$.

Caso 3º) En $f(x, y, y') = 0$ falta la y.

Será una ecuación de la forma $f(x, y') = 0$. Lo mismo que antes, sustituimos esta ecuación por dos paramétricas, $x = g(\lambda)$, $y' = h(\lambda)$. Puesto que es $dy = y'dx$, tendremos: $dy = h(\lambda)g'(\lambda)\, d\lambda$, de donde

$$y = \int h(\lambda)g'(\lambda)\, d\lambda + c.$$

La solución general de $f(x, y') = 0$ en forma paramétrica es, pues:

$$\begin{cases} x = g(\lambda) \\ y = \int h(\lambda)g'(\lambda)\, d\lambda. \end{cases}$$

Es obvio que si $f(x, y') = 0$ se puede resolver en y', bastará integrar. Y si puede resolverse en x, tomaremos como parámetro a y'.

Ejemplo:

Se trata de integrar la ecuación

$$y'^2 - 2y' - x + 2 = 0.$$

Podemos sustituirla, por ejemplo, por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda^2 = g(\lambda) \\ y' = 1 - \lambda = h(\lambda). \end{cases}$$

Entonces tendremos:

$$y = \int h g' \, d\lambda = 2 \int \lambda(1 - \lambda) \, d\lambda = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3 + c.$$

La solución general en paramétricas será, pues:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda^2 \\ y = \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3 + c, \end{cases}$$

donde podemos eliminar λ, obteniendo la solución en forma ordinaria.

Como la ecuación dada puede resolverse en x, podríamos haber hecho $y' = \lambda$, con lo cual

$$x = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

que es otra manera de establecer las paramétricas que sustituyan a la ecuación.

Caso 4º) En $f(x, y, y') = 0$ *se puede despejar* y.

Tendremos $y = \varphi(x, y')$. Hagamos $y' = p$. Será $y = \varphi(x, p)$. Derivemos respecto de x:

$$y' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{dp}{dx},$$

o sea:

$$p = \varphi(x, p) + \psi(x, p) p'.$$

Esta ecuación es de la forma $M(x, p)\,dx + N(x, p)\,dp = 0$, que vimos ya en el parágrafo 1. Pero puede no pertenecer a ninguno de los tipos allí estudiados. Si pudiéramos integrarla, su solución general sería $F(x, p, c) = 0$, que junto con $y = \varphi(x, p)$ constituiría la solución, en forma paramétrica (parámetro p), de la ecuación $y = \varphi(x, y')$.

Obsérvese que el método consiste en derivar para llegar a la integral general. Es el "metodo de integración por derivación", que ya fue empleado en las ecuaciones de Lagrange y Clairaut.

Caso 5º) En $f(x, y, y') = 0$, *se puede despejar* x

Entonces es $x = \eta(y, y')$. Hacemos $y' = p$; o sea: $x = \eta(y, p)$. Partamos de la identidad $dy = y' dx$; pero $y' = p$,

$$dx = \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial p} dp.$$

Tendremos:

$$dy = p \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial p} dp \right),$$

que es de la forma

$$M(y, p)\,dy + N(y, p)\,dp = 0.$$

Si podemos integrarla, tendremos una ecuación $G(y, p, c) = 0$, que junto con $x = \eta(y, p)$ constituye la solución en paramétricas (parámetro p) de la ecuación $x = \eta(y, y')$.

8.2. Ecuaciones de segundo orden

Si en la forma general implícita

$$f(x, y, y', y'') = 0 \tag{8.2a}$$

faltan uno o varios argumentos (excepto, claro es, y''), la ecuación puede ser reducida a otra de primer orden.

A) Si en (8.2a) falta la y, tendremos una ecuación $f(x, y', y'') = 0$, que se reduce a otra de primer orden haciendo $y' = p$, quedándonos $f(x, p, p') = 0$. Si la integral general de esta última ecuación puede resolverse en p, será $p = \varphi(x, c_1)$. Por lo tanto

$$y = \int \varphi(x, c_1)\, dx + c_2.$$

Por ejemplo, hacemos $y' = p$ en la ecuación lineal

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x,$$

y tenemos

$$p' - \frac{1}{x} p = x,$$

que es lineal y de primer orden, y ya sabemos integrarla: $p = x^2 + c_1 x$. Luego

$$y = \int p\, dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2.$$

B) Si en (8.2a) falta la x, tendremos $f(y, y', y'') = 0$. Haremos $y' = p$, pero considerando a y como variable independiente. Entonces habrá que calcular

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \equiv \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

Nuestra ecuación será ahora $f(y, p, p\, dp/dy) = 0$, de primer orden, cuya integración, de ser posible, conduce a una solución de la forma $F(y, p, c_1) = 0$, o sea: $F(y, y', c_1) = 0$, o bien: $\phi(y, y') = 0$, que es una ecuación del caso 2º del apartado anterior.

Ejemplo:

Vamos a integrar la ecuación $2y\,y' - y'^2 - 1 = 0$. Hacemos $y' = p$, considerando a y como variable independiente. Entonces será $y'' = p\,dp/dy$. La ecuación queda así:

$$2yp\frac{dp}{dy} - (p^2 + 1) = 0,$$

en la cual se puede separar las variables:

$$\frac{2p\,dp}{p^2+1} - \frac{dy}{y} = 0.$$

Integrando, nos da $p^2 - c_1 y + 1 = 0$, o sea: $y'^2 - c_1 y + 1 = 0$, que es de primer orden, en la cual falta la x (caso 2º del apartado 8.1). Como se resuelve en y, podemos hacer $y' = \lambda$. Tenemos, pues:

$$y = \frac{1}{c_1}(1 + \lambda^2) \equiv g(\lambda)$$

$$y' = \lambda \equiv h(\lambda).$$

Entonces será

$$x = \int \frac{g'(\lambda)}{h(\lambda)}\,d\lambda = \frac{2}{c_1}\lambda + c_2.$$

Las ecuaciones paramétricas de las curvas integrales de la ecuación dada son, por lo tanto:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{c_1}\lambda + c_2 \\ y = \dfrac{1}{c_1}(1 + \lambda^2). \end{cases}$$

Eliminando λ nos queda:

$$y = \frac{c_1}{4}(x - c_2)^2 + \frac{1}{c_1},$$

que es la solución general en la forma ordinaria explícita.

C) Las ecuaciones con sólo dos argumentos se reducen a otras de primer orden por medio de sustituciones análogas a las establecidas antes. Los tipos posibles son

$$f(x, y'') = 0,\ f(y, y'') = 0,\ f(y', y'') = 0.$$

En $f(x, y'') = 0$ haremos $y' = p$, con lo cual es $y'' = p'$, quedándonos $f(x, p') = 0$ (caso 3º de 8.1).

En $f(y, y'') = 0$ se considera independiente a la y y se hace $y' = p$; por lo tanto, $y'' = p\ dp/dy$. Nos queda $f(y, p\ dp/dy) = 0$, que es de primer orden. Si $f(y, y'') = 0$ es resoluble en y'', es decir, si $y'' = \varphi(y)$, podemos hallar la solución general del siguiente modo:

$$dy'^2 = 2y'\,y''\,dx = 2y''\,dy = 2\varphi(y)\,dy.$$

Integramos:

$$y'^2 = 2\int \varphi(y)\,dy + c_1.$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy + c_1}.$$

O bien:

$$dx = \pm \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy + c_1}}.$$

Integrando nuevamente, es:

$$x + c_2 = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \varphi(y)\,dy + c_1}}.$$

Finalmente: en una ecuación $f(y', y'') = 0$ haremos $y' = p$, con lo cual es $y'' = p'$. Queda reducida a una de primer orden: $f(p, p') = 0$, que es el caso 2° de 8.1.

Las sustituciones hechas para reducir el orden de una ecuación $f(x, y, y', y'') = 0$ en casos especiales pueden ser aplicadas, también en los mismos casos especiales, a las ecuaciones de orden superior al segundo.

8.3. Reducción de orden en una ecuación lineal

Cuando se conoce una solución particular $u(x)$ de la ecuación homogénea correspondiente a una lineal de orden n:

$$y^{(n} + a_1(x)\,y^{(n-1} + \ldots + a_n(x)\,y = h(x),$$

podemos hacer el cambio $y = uv$, donde v va a ser la nueva función desconocida. Entonces, el orden se reduce en una unidad.

Veámoslo para una ecuación de segundo orden:

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = h(x).$$

Conviene escribirla así:

$$y'' + \frac{q'}{q}\,y' + a_2(x)\,y = h(x), \qquad (8.3a)$$

donde

$$q = e^{\int a_1(x)\,dx}$$

Sea $u(x)$ una solución particular, conocida, de la homogénea de (8.3a). Hagamos $y = uv$. Sustituyendo esta expresión de y y de sus dos primeras derivadas en (8.3a) nos queda:

$$uv'' + 2u'v' + \frac{q'}{q}\,uv' + v\left(u'' + \frac{q'}{q}\,u' + a_2(x)u\right) = h(x).$$

El factor entre paréntesis que multiplica a v es idénticamente nulo, puesto que u satisface a la homogénea de (8.3a). Nos queda, después de dividir por u:

$$v'' + \left(2\frac{u'}{u} + \frac{q'}{q}\right)v' = \frac{h(x)}{u(x)} \equiv g(x).$$

Haciendo $z = v'$ será:

$$z' + \left(2\frac{u'}{u} + \frac{q'}{q}\right)z = g(x),$$

ecuación de primer orden que sabemos integrar (parágrafo 3), obteniéndose

$$z = c_1\,\varphi(x) + \psi(x).$$

Con una nueva integración hallamos v. Por lo tanto, tenemos también $y = uv$.

Ejemplo:

Integrar la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^2.$$

Salta a la vista que una solución de la homogénea es $u(x) = x$. Por lo tanto, hagamos $y = xv$. Será $y' = v + xv'$, $y'' = 2v' + xv''$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación, resulta:

$$2v' + xv'' + \frac{1}{x}v + v' - \frac{1}{x}v = x^2,$$

o sea: $v'' + (3/x)\,v' = x$. Haciendo $v' = z$, tendremos la ecuación de primer orden $z' + (3/x)\,z = x$, cuya solución general es (parágrafo 3)

$$z = \frac{1}{5}x^2 + c\,x^{-3},$$

de donde

$$v = \frac{1}{15}x^3 - \frac{c_1}{2}x^{-2} + c_2.$$

Por lo tanto, la integral general de la ecuación dada será

$$y = xv = \frac{1}{15}x^4 - \frac{c_1}{2}x^{-1} + c_2\,x.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Hallar la ecuación diferencial de la familia de las circunferencias que tienen su centro en el eje x y su radio es proporcional a la distancia entre su centro y el origen de coordenadas.

Si el centro es $(a, 0)$, el radio será $r = ka$. Por lo tanto, la ecuación de la familia es

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2a^2,$$

donde k es un número y a el parámetro. Derivando respecto a x tenemos: $x - a + y\,y' = 0$. Eliminando α entre ambas relaciones, resulta:

$$y^2(y'^2 + 1) = k^2(x^2 + 2x\,y\,y' + y^2y'^2),$$

que es la ecuación diferencial de la familia.

Si fuera $k = 1$, tendríamos la familia de las circunferencias con centro en el eje x que son tangentes al eje y. La ecuación diferencial sería entonces $y^2 - x^2 = 2x\,y\,y'$, que podemos escribir así:

$$(x^2 - y^2)\,dx + 2x\,y\,dy = 0.$$

Es homogénea. Dividiendo por x^2, haciendo $z = y/x$ y conservando la variable x llegamos a

$$\frac{dx}{x} + \frac{2z}{1+z^2} = 0,$$

cuya integral es $x(1+z^2) = c$. Deshaciendo el cambio queda: $x^2 - cx + y^2 = 0$, que son, efectivamente, circunferencias tangentes al eje y con centros $(c/2, 0)$.

2. En cada recta normal a una curva γ se considera el segmento cuyos extremos son el punto de contacto con la curva y la intersección con el eje x. Deseamos que los puntos medios de estos segmentos estén en la parábola $y^2 = x$. Se trata de hallar la ecuación de la familia de curvas γ en cuyas normales se cumple esta condición.

La ecuación de la normal a una curva γ en un punto $P(x_0, y_0)$ de ella es $y - y_0 = -1/y'_0(x - x_0)$. La intersección Q de esta normal con el eje x es $Q(x_0 + y_0\,y'_0, 0)$. El punto medio M del segmento PQ será, pues:

$$M\left(x_0 + \frac{1}{2}y_0\,y'_0,\ \frac{1}{2}y_0\right).$$

Estas coordenadas de M han de satisfacer a la ecuación $y^2 = x$; es decir:

$$\frac{1}{4}y_0^2 = x_0 + \frac{1}{2}y_0\,y'_0,$$

que es la ecuación diferencial de la familia de curvas γ, donde suprimiremos el subíndice; es decir:

$$y^2 = 4x + 2yy'.$$

La podemos escribir así:

$$y' - \frac{1}{2}y + 2xy^{-1} = 0,$$

que es una ecuación de Bernoulli. Seguiremos los pasos del método correspondiente. Dividiendo por y^{-1} queda:

$$y\,y' - \frac{1}{2}y^2 + 2x = 0.$$

Hacemos $y^2 = u$, y derivamos: $2yy' = u'$, de donde $y' = u'/2y$. Llevando estas expresiones de y^2 e y' a la ecuación anterior, tenemos:

$$\frac{1}{2}u' - \frac{1}{2}u + 2x = 0,$$

o sea: $u' - u = -4x$, ecuación lineal de primer orden, cuya integral general es

$$u = -4e^x \int xe^{-x}\,dx + Ce^x = 4(x+1) + Ce^x.$$

Restituyendo y nos queda:

$$y^2 = 4(x+1) + Ce^x,$$

que es la ecuación de la familia de curvas γ.

3. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas γ del problema anterior.

Trayectorias ortogonales de una familia de curvas γ son curvas que cortan a las anteriores formando ángulo recto. Es decir: las tangentes a las curvas γ y a sus ortogonales en los puntos de corte son perpendiculares. Por lo tanto, basta sustituir y' por $-1/y'$ en la ecuación diferencial de la familia de las γ.

En el problema anterior, la ecuación diferencial de las curvas γ era

$$y^2 = 4x + 2yy'.$$

Las trayectorias ortogonales tendrán, pues, la ecuación

$$y^2 = 4x - 2y/y',$$

o sea:

$$(y^2 - 4x)y' + 2y = 0.$$

Puesto que $dy = y'dx$, podemos expresarla así:

$$2y\,dx + (y^2 - 4x)\,dy = 0,$$

donde

$$2y = P,\ y^2 - 4x = Q.$$

Como P es función sólo de y y $Q_x - P_y = -6$, el cociente

$$\frac{Q_x - P_y}{P}$$

depende sólo de y. Por lo tanto, la ecuación admite un factor integrante $\mu(y)$. Tendremos:

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{y}.$$

Integrando, es:

$$\ln|\mu| = -3\ln|\mu| \Rightarrow\ \mu = \frac{1}{y^3}.$$

Multiplicando a la ecuación por μ nos queda la diferencial exacta

$$\frac{2}{y^2}\,dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{4x}{y^3}\right)dy = 0,$$

donde

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2}{y^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{y} - \frac{4x}{y^3},$$

siendo φ la función potencial. De la primera identidad tenemos: $\varphi = 2x/y^2 + f(y)$. Derivemos respecto de y:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{4x}{y^3} + f'(y).$$

El segundo miembro ha de ser idéntico a $1/y - 4x/y^3$. Por lo tanto,

$$f'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow f(y) = \ln|y| + k.$$

Así, pues, será: $\varphi = 2x/y^2 + \ln|y| + k$. La integral general de la ecuación es $\varphi = cte.$, o sea:

$$\frac{2x}{y^2} + \ln|y| = C,$$

que es la ecuación de las trayectorias ortogonales.

4. Es evidente que una solución de la ecuación homogénea

$$y'' + x\,a(x)\,y' - a(x)\,y = 0$$

es x, cualquiera que sea $a(x)$.

Hallar esta función $a(x)$ sabiendo que la ecuación tiene otra solución $u(x)$ tal que el wronskiano de x y u es

$$W = x^2e^x, \text{ y } u(1) = e.$$

$$W = \begin{vmatrix} x & u \\ 1 & u' \end{vmatrix} = x\,u' - u = x^2e^x;$$

o sea: $u' - (1/x)\,u = xe^x$, ecuación lineal de primer orden, cuya integral general es $u = xe^x + cx$. La condición $u(1) = e$ nos da $c = 0$. Por lo tanto, $u = xe^x$. Obsérvese que en la ecuación en u el coeficiente $-1/x$ es función continua $\forall x \neq 0$, y que el punto $x = 1$ pertenece al intervalo de continuidad, por lo cual la curva integral que pasa por $(1, e)$ existe y es única. Sustituyendo la expresión de u en la ecuación del enunciado, tenemos:

$$2e^x + xe^x + (xe^x + x^2e^x)a(x) - xe^x a(x) = 0,$$

de donde:

$$a(x) = -\frac{1}{x^2}(x + 2).$$

5. Integrar la ecuación

$$x^3y''' + 4x^2y'' = x.$$

Es una ecuación de Euler, y podemos utilizar el método explicado para tales ecuaciones. Pero también se advierte que sólo figuran dos derivadas de órdenes consecutivos y no figura la función y, con lo cual podemos hacer $y'' = z$, que nos conduce directamente a una ecuación de primer orden. Lo haremos de las dos maneras.

Por ser de Euler, hagamos en el primer miembro las sustituciones

$$x^3y''' = D(D-1)(D-2)\,y,$$

$$x^2y'' = D(D-1)\,y.$$

En el segundo miembro haremos $x = e^t$, y entenderemos que el operador D es d/dt. Resulta, pues:

$$D(D-1)(D-2)y + 4D(D-1)\,y = e^t,$$

donde ahora es y función de t. Puesto que los binomios formales tienen coeficientes constantes, podemos efectuar formalmente su producto, y se obtiene:

$$y''' + y'' - 2y' = e^t,$$

que es una ecuación lineal de coeficientes constantes. Las raices de la ecuación característica $D^3 + D^2 - 2D = 0$ son $0, 1$ y -2. Por lo tanto, tres soluciones de la ecuación homogénea, linealmente independientes, serán: $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = e^t$, $u_3(t) = e^{-2t}$. Para hallar la integral general de esta ecuación en $y(t)$ no homogénea utilizaremos el método de la variación de las constantes (también puede emplearse el de las familias para hallar una solución particular, puesto que es de coeficientes constantes, y el segundo miembro es una de las funciones a las que se refiere el método). La solución general será de la forma

$$y = c_1(t) + c_2(t)\,e^t + c_3(t)\,e^{-2t}.$$

El wronskiano de $u_1 = 1$, $u_2 = e^t$, $u_3 = e^{-2t}$ es $W = 6e^{-t}$. Las derivadas

$$c'_1(t),\ c'_2(t),\ c'_3(t)$$

son, pues:

$$c'_1 = \frac{W_1}{6e^{-t}},\ c'_2 = \frac{W_2}{6e^{-t}},\ c'_3 = \frac{W_3}{6e^{-t}},$$

donde los numeradores son los determinantes que resultan de sustituir en W las columnas (filas) primera, segunda y tercera respectivamente por $(0, 0, e^t)$, obteniéndose $W_1 = -3$, $W_2 = 2e^{-t}$, $W_3 = e^{2t}$. Por lo tanto,

$$c'_1(t) = -\frac{1}{2}e^t,\ c'_2(t) = \frac{1}{3},\ c'_3(t) = \frac{1}{6}e^{3t}.$$

Integrando las tres expresiones tenemos:

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}e^t + \lambda_1,\ c_2(t) = \frac{1}{3}t + \lambda_2,\ c_3(t) = \frac{1}{18}e^{3t} + \lambda_3.$$

Así, pues:

$$y(t) = \lambda_1 + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{-2t} + \frac{1}{3}te^t - \frac{4}{9}e^t.$$

Restituyendo la variable x queda finalmente:

$$y(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^{-2} + \frac{1}{3}x\ln|x| - \frac{4}{9}x.$$

Si utilizamos el segundo procedimiento, haciendo $y'' = z$, la ecuación se reduce a esta otra: $x^3z' + 4x^2z = x$, donde la variable independiente sigue siendo x. Dividamos por x^3 :

$$z' + 4x^{-1}z = x^{-2},$$

ecuación lineal de primer orden, cuya solución general es

$$z = \frac{1}{3}\frac{1}{x} + c_1x^{-4}.$$

Intengrando dos veces tendremos y. Nos da:

$$y = c_3 + c_2x + \frac{c_1}{6}x^{-2} + \frac{1}{3}x\ln|x| - \frac{1}{3}x.$$

Esta solución es la misma obtenida anteriormente; basta hacer

$$c_3 = \lambda_1,\ c_2 = \lambda_2 - \frac{1}{9},\ c_1 = 6\lambda_3.$$

6. Sabiendo que $u_1(x) = x$, $u_2(x) = x^2$ son dos soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden $Ly = 0$, se pide:

1°) Hallar una solución particular de

$$Ly = \frac{1}{1+x^2}.$$

2°) Obtener los coeficientes del operador $L = D^2 + a_1(x)\,D + a_2(x)$.

3°) Integrar la ecuación $Ly = 0$ ignorando las soluciones particulares dadas al principio.

1°) Utilizaremos el método de la variación de las constantes. El wronskiano es $W(x, x^2) = x^2$. Las derivadas de las funciones $c_1(x)$ y $c_2(x)$ son

$$c'_1(x) = \frac{W_1}{x^2},\ c'_2(x) = \frac{W_2}{x^2},$$

donde

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & 2x \end{vmatrix} = -\frac{x^2}{1+x^2};\quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & \dfrac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Luego

$$c'_1(x) = -\frac{1}{1+x^2},\ c'_2(x) = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

que integradas, y dando el valor cero a las constantes de integración, conducen a

$$c_1(x) = -\arctan x,\ c_2(x) = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|.$$

Por lo tanto, una solución particular de

$$Ly = \frac{1}{1+x^2}$$

será:

$$y_P = x^2 \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right| - x\arctan x.$$

2°) Puesto que $u_1(x) = x, u_2(x) = x^2$ son dos soluciones de $Ly = 0$, deberá verificarse:

$$[D^2 + a_1(x)\,D + a_2(x)]x = 0$$
$$[D^2 + a_1(x)\,D + a_2(x)]x^2 = 0,$$

que es un sistema lineal en $a_1(x)$ y $a_2(x)$:

$$\begin{cases} a_1 + xa_2 = 0 \\ 2xa_1 + x^2 a_2 = -2, \end{cases}$$

de donde $a_1(x) = -2/x, a_2(x) = -2/x^2$.

3°) Conocido ya L, la ecuación es:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0,$$

o bien:

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

que es una ecuación de Euler. Teniendo en cuenta que

$$x^2y'' = D(D-1)y,\ xy' = Dy,$$

donde $D = d/dt$, quedará reducida a otra de coeficientes constantes:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Como las raíces de $D^2 - 3D + 2 = 0$ son 1 y 2, la solución general será:

$$y(t) = \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{2t}.$$

Puesto que hemos hecho el cambio $x = e^t$, resulta:

$$y(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2.$$

Esto es inmediato utilizando las soluciones particulares x, x^2 dadas al principio.

7. Dado el sistema

$$\begin{cases} u' - v = e^x \\ u'' + v' = 1, \end{cases}$$

hallar la solución particular que cumple las condiciones $u(0) = u'(0) = 1, v(0) = 0$, si éstas son compatibles.

El sistema puede escribirse así:

$$\begin{cases} Du - v = e^x \\ D^2u + Dv = 1, \end{cases}$$

cuyo operador es

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & -1 \\ D^2 & D \end{vmatrix} = 2D^2.$$

Este resultado nos indica ya que la solución general del sistema se reduce a un simple caso de cálculo integral, no habiendo necesidad de integrar primero la ecuación homogénea $\Delta(\cdot) = 0$. Los determinantes Δ_u, Δ_v son

$$\Delta_u = \begin{vmatrix} e^x & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix} = e^x + 1; \quad \Delta_v = \begin{vmatrix} D & e^x \\ D^2 & 1 \end{vmatrix} = -e^x.$$

Tenemos, pues, las ecuaciones

$$2D^2u = e^x + 1,\ 2D^2v = -e^x,$$

cuyas integrales generales son:

$$u = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{4}x^2 + c_1x + c_2,\ v = -\frac{1}{2}e^x + d_1x + d_2.$$

Para reducir el número de constantes a dos, que es el orden de Δ, basta llevar estas expresiones de u y v a la primera ecuación del sistema; es decir, a $u' - v = e^x$. Nos da: $d_1 = 1/2$, $d_2 = c_1$. De modo que la solución general viene dada por

$$u = c_1 x + c_2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}e^x,$$

$$v = c_1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}e^x.$$

Obsérvese que con dos valores iniciales de u y u' respectivamente para un $x = x_0$, quedan determinadas las dos constantes c_1 y c_2. También las determinan $u(x_0)$ y $v(x_0)$. En nuestro caso, las condiciones $u(0) = u'(0) = 1$ nos llevan a la solución particular

$$u = \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + e^x\right)$$

$$v = \frac{1}{2}(1 + x - e^x),$$

que es compatible con la condición $v(0) = 0$ (pero que pudiera no haberlo sido).

8. Estudiar las soluciones de la ecuación $y'^2 + a(x)y' = h(x)$ sabiendo que $u(x) = |x|$ es una de ellas.

Puesto que $u(x) = |x|$ es solución, y sabemos que $u'(x) = |x|/x$ (apartados 1.6 y 2.2 del capítulo 1), sustituimos en la ecuación, y tenemos:

$$h(x) = \frac{|x|}{x}a(x) + 1.$$

La ecuación será, pues:

$$y'^2 + a(x)y' - \frac{|x|}{x}a(x) - 1 = 0. \tag{8a}$$

Supondremos que $a(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces, $(|x|/x)a(x)$ tiene una discontinuidad finita en $x = 0$. La ecuación (8.a) es resoluble en y' :

$$y' = -\frac{1}{2}a(x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2(x) + 4\frac{|x|}{x}a(x) + 4}.$$

Desdoblemos el $(\pm)$ y llamemos $y'_{(+)}, y'_{(-)}$ a las derivadas correspondientes a los signos $(+)$ y $(-)$. Tendremos:

$$y'_{(+)} = -\frac{1}{2}a(x) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2(x) + 4\frac{|x|}{x}a(x) + 4}.$$

Cuando es $x > 0$, el radicando es $(a(x) + 2)^2$, y entonces $y'_{(+)} = 1$.

Si es $x < 0$, el radicando es $(a(x) - 2)^2$, quedándonos $y'_{(+)} = -1$.

En $x = 0$ no está definida $y'_{(+)}$. Pero la función que vale $+1$ si $x > 0$ y -1 si $x < 0$ es $|x|/x$. Por lo tanto: $y'_{(+)} = |x|/x$, cuya integral es, como sabemos, $y_{(+)} = |x| + cte.$, corroborándose la solución $u(x) = |x|$.

Consideremos ahora

$$y'_{(-)} = -\frac{1}{2}a(x) - \frac{1}{2}\sqrt{a^2(x) + 4\frac{|x|}{x}a(x) + 4}.$$

Para $x > 0$ es $y'_{(-)} = -a(x) - 1$; y para $x < 0$ es $y(-) = -a(x) + 1$. Por lo tanto, $\forall x \neq 0$ será

$$y'_{(-)} = -a(x) - \frac{|x|}{x},$$

cuya integral es

$$y_{(-)} = -\int a(x)\,dx - |x| + cte.,$$

que es otra solución de la ecuación (8.a), y existe para todo $x \in \mathbf{R}$, puesto que $a(x)$ es continua.

Veamos qué ocurre si $a(x) = -|x|$. La ecuación (8.a) será ahora

$$y'^2 - |x|y' + x - 1 = 0. \tag{8b}$$

Evidentemente, $|x| + cte.$ sigue siendo solución. La otra será:

$$y_{(-)} = -\int a(x)\,dx - |x| + cte. =$$

$$= -\int (-|x|)\,dx - |x| + cte. =$$

$$= \frac{1}{2}x|x| - |x| + cte.,$$

que satisface a (8b).

Pero si en (8b) despejamos y' tenemos:

$$y' = \frac{1}{2}|x| \pm \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{2}|x| \pm \frac{1}{2}x \mp 1,$$

cuya integral es:

$$y = \frac{1}{4}x|x| \pm \frac{1}{4}x^2 \mp x + cte.$$

9. Una solución particular de la ecuación $y = xf(y') + y'^2$ es la parábola

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1.$$

Hallar la solución general.

Se trata de una ecuación de Lagrange. En la parábola tenemos:

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1;\ y' = -\frac{1}{2}x - 1;\ y'^2 = \frac{1}{4}x^2 + x + 1.$$

Sustituyendo todo esto en la ecuación de Lagrange nos queda:

$$xf(y') = -\frac{1}{2}x^2 - 2x = x(-\frac{1}{2}x - 2).$$

Pero la función entre paréntesis es

$$-\frac{1}{2}x - 1 - 1 = y' - 1.$$

O sea: $f(y') = y' - 1$. La ecuación de Lagrange es, pues:

$$y = x(y' - 1) + y'^2.$$

Para integrarla hacemos $y' = p$:

$$y = x(p - 1) + p^2.$$

Derivamos respecto de x, con lo cual el primer miembro será p. En el segundo tendremos en cuenta la derivada de p respecto de x. Queda:

$$p = p - 1 + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx},$$

o sea:

$$1 = (x + 2p)\frac{dp}{dx}.$$

Dividimos por dp/dx:

$$\frac{dx}{dp} = x + 2p,$$

que es una ecuación lineal en $x(p)$ de primer orden, cuya solución general es:

$$x = ce^p - 2p - 2.$$

Esta expresión de x, junto con la de $y = x(p - 1) + p^2$ establecida antes, constituyen las ecuaciones paramétricas de la solución general de la ecuación de Lagrange. Nos queda:

$$\begin{cases} x = ce^p - 2p - 2 \\ y = ce^p(p - 1) - p^2 + 2 \end{cases}$$

Para $c = 0$ tenemos

$$\begin{cases} x = -2p - 2 \\ y = -p^2 + 2 \end{cases}$$

de donde, eliminando p, resulta la parábola

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x + 1$$

del enunciado.

10. La ecuación

$$P(x, y)\,dx + (x^2 + \frac{x}{y})\,dy = 0$$

admite el factor integrante $\mu = x$. Se sabe además que $\partial P/\partial x = 3y$ y que $P(0, 1) = 0$. Se pide:

1°) Hallar $P(x, y)$.

2°) Obtener la curva integral que pasa por $(1, 1)$.

1°) Multiplicando la ecuación por $\mu = x$ tenemos:

$$x\,P\,dx + \left(x^3 + \frac{x^2}{y}\right) dy = 0,$$

cuyo primer miembro es diferencial exacta. Por lo tanto, las derivadas cruzadas serán iguales:

$$\frac{\partial(xP)}{\partial y} = 3x^2 + \frac{2x}{y}; \quad x\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + \frac{2x}{y},$$

de donde

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + \frac{2}{y}.$$

Ya conocemos, pues, las dos derivadas parciales primeras de P. Integrando la del enunciado será: $P = 3xy + f(y)$. Derivemos respecto de y :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + f'(y),$$

que debemos identificar con

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x + \frac{2}{y},$$

resultando

$$f'(y) = \frac{2}{y} \Rightarrow f(y) = \ln y^2 + c.$$

Por lo tanto, $P = 3xy + \ln y^2 + c$. La condición $P(0, 1) = 0$ nos lleva a $c = 0$. Luego

$$P(x, y) = 3xy + \ln y^2.$$

2°) Utilizando el factor integrante $\mu = x$, tenemos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y + x\ln y^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + \frac{x^2}{y}$$

Integremos esta última:

$$\varphi = x^3y + x^2 \ln|y| + g(x),$$

que derivada respecto de x nos da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y + x\ln y^2 + g'(x) \equiv 3x^2y + x\ln y^2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = k.$$

Por lo tanto,

$$\varphi = x^3y + x^2 \ln|y| + k.$$

La solución general de la ecuación es $\varphi = cte.$, o sea: $x^3y + x^2 \ln|y| = c$. El punto $(1, 1)$ nos determina $c = 1$. La curva integral pedida es, pues:

$$x^3y + x^2 \ln|y| = 1.$$

PROPUESTOS

1. Utilizando el cálculo con valores absolutos, obtener la ecuación diferencial de la familia de los contornos de los ángulos cuyos vértices están en la recta $x = 1$, y cuyos lados pasan respectivamente por los puntos $A(0, 2)$ y $B(2, 2c)$, siendo c la ordenada del vértice. De la ecuación diferencial hallada deducir separadamente las ecuaciones de las familias de los lados derechos e izquierdos.

2. En la ecuación diferencial $y' + a(x)y = e^{2x}$ sabemos que $qe^{2x}\cos^2 x = 1$, siendo $q = exp \int a(x)\,dx$. Obténgase $a(x)$.

3. Integrar la ecuación

$$\operatorname{sen} x - x\cos x + 3x^2(y - x)^2(y' - 1) = 0.$$

4. Integrar la ecuación

$$y'' + y = 3 - \operatorname{sen} x + e^{-x}.$$

5. Sabiendo que

$$u' - \frac{2}{x}u - 2x = 0$$

es la ecuación de primer orden deducida de una de Bernoulli:

$$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0,$$

mediante el cambio de función $u = 1/y^{n-1}$, se pide:

1°) Determinar los coeficientes $a(x), b(x)$ de la ecuación de Bernoulli y el grado n de la misma.

2°) Hallar su solución general.

6. Integrar la ecuación

$$2xyy' = 3x^4 + y^2 + 1$$

buscando un factor integrante.

7. Dada la ecuación

$$xy^2y' + y^3 = \frac{a^2}{x},$$

se pide:

1°) Averiguar si admite un factor integrante dependiente sólo de x.

2°) Obtener la solución general.

8. Dada la ecuación

$$y' = \frac{2x - y + 5}{x - y + 3},$$

hallar la curva integral que pasa por el origen de coordenadas.

9. Dada la ecuación

$$x(1 + x^2y^2)\,dy + y(x^2y^2 - 1)\,dx = 0,$$

se pide:

1°) Hallar un factor integrante.

2°) Obtener la solución general $U(x, y) = c$.

3°) Obtener la solución particular que pasa por el punto (e^{-1}, e).

10. Hallar la solución particular $u(x, y) = 0$ de la ecuación

$$\frac{1}{2}y^2(1 + x\tan x)\,dx + (xy + \cos x)\,dy = 0$$

con la condición $x = \pi,\ y = 1$.

11. Integrar la ecuación

$$y' + \frac{y}{x} + xy^3 = 0.$$

12. Integrar la ecuación

$$2xy\,y' + (1 + x)y^2 = e^x.$$

13. Hallar la curva integral de la ecuación

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

que pasa por el punto $(0, 1)$.

14. Dada la ecuación

$$(x^2y + y^3 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0,$$

se pide:

1°) Encontrar un factor integrante de la forma

$$\mu = x^{-3}f\left(\frac{y}{x}\right).$$

2°) Integrarla.

15. Hallar la solución particular del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4(x + y) \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 4y \end{cases}$$

que cumple las condiciones $x(0) = 1,\ y(0) = 0$.

16. Integrar la ecuación

$$(x^2 + 1)y' - xy + 3xy^2 = 0.$$

BIBLIOGRAFIA

DOU, A.: *Ecuaciones diferenciales ordinarias*. Dossat, S.A. Madrid, 1964.

ELSGOLTZ, L.: *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Ed. Mir.Moscú, 1977.

HILDEBRAND, F.B.: *Métodos de cálculo para ingenieros*. Aguilar. Madrid, 1960.

KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V.: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Ed. Mir.Moscú 1975.

KRALL, Allan M.: *Linear Methods of Applied Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1973.

PUIG ADAM, P.: *Ecuaciones diferenciales*. Madrid, 1960.

REY PASTOR, J.-PI CALLEJA-TREJO: *Análisis matemático*. Ed. Kapelusz. Buenos Aires, 1959.

CAPITULO 3

LA TRANSFORMACION DE LAPLACE

1. INTRODUCCION

La transformación de Laplace es un método de cálculo que se utiliza principalmente para la resolución de problemas de valores iniciales en las ecuaciones diferenciales. Si una ecuación $Ly = h(x)$ es lineal de orden n con coeficientes constantes, y nos piden la solución particular que cumple las condiciones

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

podemos aplicar este método de Laplace, y obtenemos una ecuación de la forma

$$A(p) + B(p)\,\varphi(p) = H(p),$$

donde $\varphi(p)$ es la función transformada de la que nos piden, $A(p)$ y $B(p)$ son polinomios en p perfectamente determinados, y $H(p)$ la transformada de la función $h(x)$ del segundo miembro. Podemos, pues, despejar $\varphi(p)$. Es decir, llegamos así a conocer la transformada de la función $y(x)$ que cumple las n condiciones establecidas. Se trata ahora de pasar de $\varphi(p)$ a $y(x)$, cosa que puede lograrse calculando la integral de una fórmula de inversión, o bien por otros procedimientos basados en las propiedades de las transformadas.

La transformación de Laplace es una de las llamadas "transformaciones integrales". Estas últimas son de la forma general

$$\int_a^b g(p, x) f(x)\,dx,$$

donde $g(p, x)$ es el *núcleo* y $f(x)$ la función sometida a transformación. Si $f(x)$ es una función real de variable real, y la integral existe, entonces la transformada de $f(x)$ respecto del núcleo $g(p, x)$ es una función $\varphi(p)$ de la variable real o compleja p.

En la transformación de Laplace el núcleo es $g(p, x) = e^{-px}$ (p, real)[1] y los límites de la integral son $a = 0$, $b = +\infty$. Si la integral existe, la transformada de Laplace de $f(x)$ es una función de p; o sea:

[1] No es necesaria la restricción de que p sea real; pero tampoco impide el rigor en el desarrollo del tema.

$$\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx = \varphi(p).$$

A este operador integral, que actúa sobre funciones definidas para valores positivos de x, se le anota con la letra $\mathcal{L}$. Escribiremos, pues, $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$.

Pero en todo esto, el problema central consiste en saber cuáles son las condiciones de integrabilidad de la función $e^{-px}f(x)$; es decir, qué condiciones son suficientes para que $f(x)$ tenga transformada de Laplace. Lo veremos después que hayamos definido lo que se entiende por "orden exponencial".

2. CONCEPTOS PREVIOS

Recordaremos primero un par de cosas que, en buena lógica, no tendrían que ser recordadas.

2.1. Discontinuidades finitas

Una función real de variable real $f(x)$ tiene una discontinuidad finita inevitable en el punto $x = x_0$ si existen los límites laterales de $f(x)$ en x_0 y son finitos y distintos. La función puede o no estar definida en x_0.

Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$$

vale

$$-1 \forall x < 3, \text{ y } +1 \forall x > 3.$$

En $x = 3$ no está definida, pero los límites laterales en este punto existen: son -1 y $+1$. Así, pues, $f(x)$ tiene una discontinuidad finita inevitable en $x = 3$.

La función llamada "parte entera de x", simbolizada por $E(x)$, hace corresponder a cada valor de x expresado en forma decimal la parte entera de ese decimal, si hacemos que la parte no entera sea siempre positiva. Tomemos, por ejemplo, $x = 2$. En un entorno de 2 es $E(x) = 2$ si x pertenece al semientorno derecho, incluido 2, y $E(x) = 1$ si x está en el semientorno izquierdo, excluido 2. Existen los límites laterales en $x = 2$, que son 1 por la izquierda y $2 = E(2)$ por la derecha. Por lo tanto, hay discontinuidad finita inevitable en $x = 2$. Pero aquí la función está definida en dicho punto. Y esto acontece en todo $x \in \mathbb{Z}$. Es una escalonada ascendente cuyos segmentos son cerrados por la izquierda y abiertos por la derecha.

2.2. Continuidad a trozos

Una función real de variable real $f(x)$ es continua a trozos (o parcialmente continua, o casi continua) en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si tiene en I un número finito de puntos de discontinuaidad finita y es continua en los demás puntos de I.

Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x \left(\frac{|x-1|}{x-1} - \frac{|x+1|}{x+1} \right)$$

es continua a trozos en $I = \mathbb{R}$, pues tiene dos puntos de discontinuidad finita en $x = \pm 1$ y es continua en el resto de la recta real. Esta función es nula en $(-\infty, -1)$ y $(+1, +\infty)$, y es

$$f(x) = -e^x \text{ en } (-1, +1).$$

No está definida en ± 1.

La función de enunciado dicotómico

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \forall x < 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & \forall x > 0 \end{cases}$$

que no vamos a definir en $x = 0$, tiene en este punto una discontinuidad finita, pues

$$g(0-) = 1, \quad g(0+) = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0,$$

y es continua en el resto de la recta real. En caulquier intervalo que contenga al punto $x = 0$ es continua a trozos, y además tiene un número finito de máximos y mínimos relativos. Recuérdese que $x \operatorname{sen} \pi/x$ está constituida por ondas senoidales que se van apretando indefinidamente cuando x tiende a cero por ambos lados, disminuyendo su amplitud (las ondas están encajadas entre las bisectrices de los cuadrantes formados por los ejes coordenados).

2.3. Orden exponencial

Decimos que una función real de variable real $f(x)$ es de *orden exponencial* si existe un número real p_0 tal que producto $e^{-p_0 x} |f(x)|$ está acotado para valores grandes de x; o sea, a partir de un $x = x_k$. Si efectivamente es así, será $e^{-p_0 x} |f(x)| < M$, siendo M una cota superior y, por supuesto, positiva.

Esta desigualdad que define el orden exponencial se puede escribir así:

$$|f(x)| < M e^{p_0 x} \tag{2.3a}$$

Por lo tanto, el orden exponencial de una función $f(x)$ queda asegurado si somos capaces de encontrar tres números reales $M > 0$, p_0 y x_k con los cuales se verifique (2.3a) para $x > x_k$. Nos basta, pues, encontrar una terna (M, p_0, x_k) que haga cierta la desigualdad, y una vez hallada no debe preocuparnos la existencia de otras ternas que también la hagan cierta.

Si p_0 es positivo, el segundo miembro de (2.3a) crece tendiendo a $+\infty$ cuando $x \to +\infty$. El primer miembro puede crecer también de la misma manera: la desigualdad no se lo impide; pero en tal caso lo hace más despacio que $M e^{p_0 x}$. Dicho de

otro modo: una función $f(x)$ puede crecer tendiendo a infinito cuando $x \to +\infty$ y, sin embargo, puede estar acotado el producto $e^{-p_0 x}|f(x)|$.

Por ejemplo, sabemos que $x < e^x$, para todo x; el valor absoluto de x no siempre es menor que e^x, pero sí lo es $\forall x > 0$. La desigualdad $|x| < Me^{p_0 x}$ queda satisfecha con la terna $(M, p_0, x_k) = (1, 1, 0)$. Luego $f(x) = x$ es de orden exponencial y, por lo tanto, el producto $e^{-x}|x|$ está acotado, aunque x crece infinitamente. También es de orden exponencial $\ln x$, pues la desigualdad $|\ln x| < Me^{p_0 x}$ se cumple con la terna $(M, p_0, x_k) = (1, 1, 1)$; el producto $e^{-x}|\ln x|$ se conserva inferior a la unidad $\forall x > 1$, a pesar de crecer infinitamente $\ln x$.

Si p_0 es positivo y el producto $e^{-p_0 x}|f(x)|$ tiene límite finito cuando $x \to +\infty$, ello implica que para valores grandes de x dicho producto está acotado y, por lo tanto, $f(x)$ es de orden exponencial.

Naturalmente, una función exponencial simple $f(x) = e^{ax}$ es de orden exponencial, pues

$$|e^{ax}| = e^{ax} < Me^{ax}$$

para $M > 1$. En cambio, e^{x^2} no es de orden exponencial, porque cualquiera que sea p_0, el producto

$$e^{-p_0 x}|e^{x^2}| = e^{-p_0 x}e^{x^2} = e^{x(x-p_0)}$$

no está acotado.

Consecuencias

1ª) *Toda función acotada es de orden exponencial*, pues si $f(x)$ está acotada será $|f(x)| < M$, que podemos escribir así:

$$|f(x)| < Me^{0x}.$$

Aquí es $p_0 = 0$, y la desigualdad es cierta para todo valor de x, si la acotación se refiere a toda la recta real.

2ª) *Si $f(x)$ es de orden exponencial, también lo es*

$$\int_0^x f(x)\,dx,$$

suponiendo $f(x)$ integrable.

Por ser $f(x)$ de orden exponencial, existen dos números reales $M > 0$ y p_0 tales que se verifica

$$|f(x)| < Me^{p_0 x} \text{ para } x > x_k > 0.$$

Si integramos ambos miembros entre cero y un x suficientemente grande, la desigualdad no cambia de sentido, o sea:

$$\int_0^x |f(x)|\,dx < M\int_0^x e^{p_0 x}\,dx = \frac{M}{p_0}(e^{p_0 x} - 1).$$

Y como

$$\left|\int_0^x f(x)dx\right| \leqslant \int_0^x |f(x)|\,dx,$$

tendremos:

$$\left|\int_0^x f(x)\,dx\right| < \frac{M}{p_0}(e^{p_0 x} - 1).$$

Estamos considerando valores grandes de x, y por supuesto *positivos*. Si $p_0 > 0$, es claro que $e^{p_0 x} - 1 < e^{p_0 x}$; luego

$$\left|\int_0^x f(x)\,dx\right| < \frac{M}{p_0}e^{p_0 x}.$$

La integral es, pues, de orden exponencial. Si es $p_0 < 0$, tenemos:

$$\frac{M}{p_0}(e^{p_0 x} - 1) = \frac{M}{-p_0}(1 - e^{p_0 x}) < \frac{M}{-p_0}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^x f(x)\,dx\right| < \frac{M}{-p_0} = \frac{M}{-p_0}e^{0x} = Ne^{0x}$$

donde N es positivo; luego la integral es también en este caso de orden exponencial. Finalmente, si es $p_0 = 0$ será, recordando que

$$\int_0^x |f(x)|\,dx \leqslant M\int_0^x e^{p_0 x}\,dx:$$

$$\left|\int_0^x f(x)\,dx\right| < M\int_0^x e^{p_0 x}\,dx = Mx < Me^x,$$

que nos prueba que

$$\int_0^x f(x)\,dx$$

es de orden exponencial.

Esto que ocurre con la integral de una función de orden exponencial no es cierto, en general, para las derivadas. Es decir, si $f(x)$, derivable, es de orden exponencial, su derivada puede no serlo. Basta un ejemplo: $\operatorname{sen} e^{x^2}$ es de orden exponencial, puesto que es una función acotada. Su derivada $2xe^{x^2}\cos e^{x^2}$ no es de orden exponencial porque, cualquiera que sea p, el producto

$$e^{-px}|2xe^{x^2}\cos e^{x^2}| = 2e^{x(x-p)}|x\cos e^{x^2}|$$

no está acotado.

3ª) *Si $f(x)$ es de orden exponencial con un número p_0, el producto $e^{-px}f(x)$ tiende a cero cuando $x \to +\infty$, siempre que sea $p > p_0$.*

Esta tercera consecuencia es sumamente importante, como veremos al tratar de hallar las transformadas de las derivadas de una función.

La demostración es simple: por ser $f(x)$ de orden exponencial, se verifica $|f(x)| < Me^{p_0x}$ para valores grandes de x. La desigualdad prevalece si multiplicamos ambos miembros por la función siempre positiva e^{-px}, pudiendo abarcar las barras del primer miembro al producto resultante. Tendremos:

$$|e^{-px}f(x)| < Me^{-(p-p_0)x}.$$

El segundo miembro tiende a cero cuando $x \to +\infty$, para todo $p > p_0$. El primer miembro es una función positiva que se mantiene menor que el segundo miembro, también positivo, para valores grandes de x. Luego $|e^{-px}f(x)|$ también tiende a cero en las mismas condiciones y, por lo tanto, $e^{-px}f(x)$ tiende asimismo a cero cuando $x \to +\infty$, siendo $p > p_0$.

3. CONDICIONES SUFICIENTES DE EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Vamos a considerar funciones $f(x)$ continuas, o continuas a trozos, en cualquier intervalo $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, siendo $x_1 > 0$. Hemos dicho que la transformada de Laplace de $f(x)$ viene definida por

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^{\infty} e^{-px}f(x)\,dx.$$

Descompongamos la integral en la suma de tres:

$$\mathcal{L}f(x) = \left(\int_0^r + \int_r^s + \int_s^{\infty}\right) e^{-px}f(x)\,dx,$$

donde $0 < r < s$.

La integral

$$\int_r^s e^{-px}f(x)\,dx$$

existe cualesquiera que sean los límites finitos r, s, puesto que el integrando es una función continua, o continua a trozos, por serlo $f(x)$.

La integral

$$\int_s^\infty e^{-px} f(x)\,dx$$

existe si $f(x)$ es, además, de orden exponencial, pues entonces, para algún valor p_0, es $|f(x)| < Me^{p_0 x}$ a partir de un $x = x_k$ (el límite inferior s de la integral lo elegiremos mayor que x_k). Multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por e^{-px}:

$$|e^{-px} f(x)| < Me^{-(p-p_0)x}.$$

Si integramos entre s y $+\infty$, la integral del segundo miembro existe cuando es $p > p_0$; luego existe la integral del primer miembro y, por lo tanto, también existe

$$\int_s^\infty e^{-px} f(x)\,dx$$

en las mismas condiciones.

La integral

$$\int_0^r e^{-px} f(x)\,dx$$

existe si $f(x)$ tiene límite finito cuando $x \to 0+$. Esta condición es muy restrictiva. Se demuestra que la integral también existe si hay un número positivo $q < 1$ tal que $x^q |f(x)|$ está acotado en un entorno de cero.

Así, pues, tres condiciones suficientes para que $f(x)$ tenga transformada de Laplace son: que $f(x)$ sea continua, o continua a trozos en cualquier intervalo $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, con $x_1 > 0$; que $f(x)$ sea de orden exponencial; que $f(x)$ tenga límite finito cuando $x \to 0+$.

Antes de continuar, conviene hacer observar que la transformación $\mathcal{L}$ de Laplace tiene las propiedades lineales, es decir:

$$\mathcal{L}(k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)) = k_1 \mathcal{L} f_1(x) + k_2 \mathcal{L} f_2(x),$$

puesto que $\mathcal{L}$ es un operador integral.

4. TRANSFORMADAS DE LAS DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA FUNCION

Sea $f(x)$ una función sucesivamente derivable en cualquier intervalo $[x_1, x_2]$ con $x_1 > 0$. Supongamos también que $f(x)$ es de orden exponencial con un número p_0, y que su límite cuando $x \to 0+$ existe y es finito. Cumple, pues, las condiciones suficientes para tener transformada de Laplace que, en virtud de la definición de $\mathcal{L}$, es única. Tratemos de hallar la transformada de $f'(x)$. Téngase presente que $f'(x)$ es continua por ser $f(x)$ sucesivamente derivable, pero debe cumplir también las otras dos condiciones suficientes que aseguran la existencia de su transformada.

Tenemos:

$$\mathcal{L}f'(x) = \int_0^\infty e^{-px} f'(x)\,dx.$$

Integrando por partes nos queda:

$$\mathcal{L}f'(x) = e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx = e^{-px} f(x)\Big|_0^\infty + p\,\mathcal{L}f(x).$$

La parte integrada tiende a cero cuando $x \to +\infty$, si es $p > p_0$, por ser $f(x)$ de orden exponencial (tercera consecuencia de 2.3). Cuando $x \to 0+$, dicha parte integrada tiende a $f(0+)$, que existe y es finito por hipótesis. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}f'(x) = p\,\mathcal{L}f(x) - f(0+).$$

Vemos aquí que la transformada de la derivada primera viene dada en función de la transformada de $f(x)$ y del límite de $f(x)$ en cero por la derecha. Claro que si $f(x)$ es continua en $x = 0$, será $f(0+) = f(0)$.

De manera análoga, y con la hipótesis del principio, hallaremos $\mathcal{L}f''(x)$, que es:

$$\mathcal{L}f''(x) = \int_0^\infty e^{-px} f''(x)\,dx.$$

Una integración por partes nos lleva a

$$\mathcal{L}f''(x) = e^{-px} f'(x)\Big|_0^\infty + p\,\mathcal{L}f'(x).$$

Puesto que $f'(x)$ es de orden exponencial, y suponiendo que existe y es finito $f'(0+)$, será:

$$\mathcal{L}f''(x) = -f'(0+) + p\,\mathcal{L}f'(x).$$

Sustituyendo $\mathcal{L}f'(x)$ por su expresión hallada antes, queda:

$$\mathcal{L}f''(x) = p^2\,\mathcal{L}f(x) - (pf(0+) + f'(0+)).$$

Por inducción, se llega a la transformada de la derivada enésima de $f(x)$:

$$\mathcal{L}f^{(n}(x) = p^n\,\mathcal{L}f(x) - \left(p^{n-1}f(0+) + p^{n-2}f'(0+) + \ldots + pf^{(n-2}(0+) + f^{(n-1}(0+)\right).$$

Así, pues, conociendo la transformada de una función $f(x)$ y los límites en cero por la derecha de $f(x)$ y de sus $n-1$ primeras derivadas (o bien sus valores en cero si son continuas en tal punto), podemos conocer la transformada de la derivada enésima de $f(x)$. Las derivadas han de ser de orden exponencial y tener límite finito cuando $x \to 0+$.

5. TRANSFORMADA DE LA INTEGRAL DE UNA FUNCION

Si $f(x)$ cumple las condiciones de existencia de su transformada, la integral $\int_0^x f(x)dx$ es de orden exponencial (consecuencia segunda de 2.3). Tenemos:

$$\mathcal{L}\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-px}\left(\int_0^x f(x)\,dx\right)dx.$$

Integraremos por partes haciendo

$$u = \int_0^x f(x)\,dx, \quad dv = e^{-px}\,dx,$$

con lo cual es

$$du = f(x)\,dx, \quad v = -\frac{1}{p}e^{-px}.$$

Nos queda:

$$\mathcal{L}\int_0^x f(x)\,dx = -\frac{1}{p}e^{-px}\int_0^x f(x)\,dx\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-px}\,dx.$$

La parte integrada se anula en el límite superior por ser

$$\int_0^x f(x)\,dx$$

de orden exponencial. También es cero en el límite inferior por la nulidad de $\int_0^0$. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{p}\mathcal{L}f(x),$$

Si el límite inferior de la integral no es cero, sino $a \neq 0$, será

$$\int_a^x = \int_0^x - \int_0^a.$$

Luego

$$\mathcal{L}\int_a^x f(x)\,dx = \mathcal{L}\int_0^x f(x)\,dx - \mathcal{L}\int_0^a f(x)\,dx.$$

Como

$$\int_0^a f(x)\,dx$$

es un número k, el cálculo directo de la transformada de k nos da

$$\mathcal{L}k = \int_0^\infty e^{-px}k\,dx = \frac{k}{p}, \text{ si es } p > 0.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\int_a^x f(x)\,dx = \frac{1}{p}\mathcal{L}f(x) - \frac{1}{p}\int_0^a f(x)\,dx,$$

con $p > p_0$, y en todo caso $p > 0$.

6. COMPORTAMIENTO DE LAS TRANSFORMADAS CUANDO $p \to +\infty$

No todas las funciones de la variable real p son transformadas de Laplace; es decir, no todas son imágenes de funciones $f(x)$ mediante la aplicación $\mathcal{L}$. El comportamiento cuando $p \to +\infty$ es una de las características más importantes de las transformadas.

Teorema I

Si $f(x)$ cumple las condiciones suficientes para la existencia de su transformada de Laplace, la transformada $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$ tiende a cero cuando $p \to +\infty$.

En efecto: Por ser $f(x)$ de orden exponencial se verifica

$$|f(x)| < Me^{-p_0x}$$

cuando $x > x_k$. Multipliquemos por e^{-px}, cosa que no hace cambiar el sentido de la desigualdad:

$$|e^{-px}f(x)| < Me^{-(p-p_0)x}.$$

También se conserva la desigualdad si integramos entre cero y $+\infty$:

$$\int_0^\infty |e^{-px}f(x)|dx < \frac{M}{p-p_0}.$$

Como

$$\left| \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-px} f(x)|\, dx,$$

será:

$$\left| \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \right| < \frac{M}{p - p_0}.$$

Cuando $p \to +\infty$, el segundo miembro tiende a cero y, por lo tanto, también el primero, lo cual implica que tiende a cero

$$\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx = \mathcal{L}f(x) = \varphi(p).$$

Consecuencia: Cuando $p \to +\infty$, el producto $p\,\varphi(p)$ está acotado, pues de la desigualdad

$$\varphi(p) < \frac{M}{p - p_0}$$

se sigue

$$p\,\varphi(p) < \frac{Mp}{p - p_0}, \quad (p > 0).$$

Cuando $p \to +\infty$,

$$\frac{Mp}{p - p_0} \to M.$$

Por lo tanto, para valores grandes de p, $\dfrac{Mp}{p - p_0}$ está acotado; luego también lo está $p\,\varphi(p)$.

Teorema II

Si $f(x)$ es derivable en $(0, x)$, es de orden exponencial y tiene límite finito cuando $x \to 0+$, y si $f'(x)$ es también de orden exponencial y continua o continua a trozos en cualquier intervalo $(0, x)$, el límite del producto $p\,\varphi(p)$ cuando $p \to +\infty$ es igual al límite de $f(x)$ cuando $x \to 0+$, o bien, es igual a $f(0)$ si f es continua en cero.

Este es el llamado teorema del valor inicial, porque permite conocer $f(0)$, o $f(0+)$, conociendo solamente la transformada de $f(x)$.

Si es $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$, sabemos que

$$\mathcal{L}f'(x) = p\,\varphi(p) - f(0+)$$

en las condiciones establecidas. Como el segundo miembro es una transformada de Laplace, su límite es cero cuando $p \to +\infty$, según el teorema I; o sea:

$$\lim_{p \to \infty} p\,\varphi(p) = f(0+).$$

Si f es continua en cero, será $f(0+) = f(0)$.

7. CALCULO DIRECTO DE ALGUNAS TRANSFORMADAS

Hemos visto en el parágrafo 5 que la transformada de una constante k es k/p, con $p > 0$. Aclaremos aquí que no sólo k tiene por transformada k/p. Por ejemplo, una función $g(x)$ que vale k para todo x perteneciente a $\mathbb{R}$, excepto en un número finito de puntos del semieje x positivo, en los cuales toma otros valores distintos de k, tiene también la misma transformada, pues la integral

$$\int_0^\infty e^{-px} g(x)\, dx$$

es convergente para $p > 0$ y conduce al mismo resultado. Pero estas funciones son extrañas, y su singularidad consiste en que son *casi una misma constante*. No es, por ejemplo, el caso de las escalonadas, las cuales no son por doquier la *misma* constante.

7.1. Transformada de una escalonada

Una función escalonada tiene una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{|x - x_j|}{x - x_j} + b$$

(capítulo 1). Cumple las condiciones suficientes de existencia de su transformada, pues es continua o continua a trozos en cualquier intervalo $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, con $x_1 > 0$; es de orden exponencial por estar acotada y tiene límite finito cuando $x \to 0+$, incluso si $x = 0$ es un punto de discontinuidad x_j. Por lo tanto, bastará saber hallar las transformadas de las funciones

$$\frac{|x - x_j|}{x - x_j}.$$

Ahora bien, debemos considerar fracciones

$$\frac{|x - \alpha|}{x - \alpha},$$

donde α puede ser positivo, nulo o negativo, porque los saltos de la escalonada se pueden producir en cualquier punto del eje x. Aunque la transformación de Laplace es un operador integral entre cero y $+\infty$, nosotros vamos a utilizar las propiedades lineales de $\mathcal{L}$ y, por lo tanto, estamos obligados a considerar los tres casos siguientes:

$$\frac{|x - \alpha|}{x - \alpha}, \quad \frac{|x + \alpha|}{x + \alpha},$$

ambos con $\alpha > 0$; y finalmente $|x|/x$.

La transformada de $\dfrac{|x - \alpha|}{x - \alpha}$, donde $\alpha > 0$, es

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\, dx;$$

y como $a \in (0, +\infty)$, descompondremos la integral en suma de dos:

$$\int_0^{\alpha} e^{-px} \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\, dx + \int_{\alpha}^{\infty} e^{-px} \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\, dx =$$

$$= -\int_0^{\alpha} e^{-px}\, dx + \int_{\alpha}^{\infty} e^{-px}\, dx = \frac{1}{p}(2e^{-\alpha p} - 1), \qquad p > 0.$$

Destacaremos este resultado para su tabulación:

$$\mathcal{L} \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha} = \frac{1}{p}(2e^{-\alpha p} - 1); \qquad \alpha > 0, \quad p > 0 \tag{7.1a}$$

La transformada de

$$\frac{|x+\alpha|}{x+\alpha},$$

con $\alpha > 0$, es

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{|x+\alpha|}{x+\alpha}\, dx,$$

y como el salto se produce en $x = -\alpha \notin (0, +\infty)$, será:

$$\int_0^{\infty} e^{-px} \frac{|x+\alpha|}{x+\alpha}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-px}\, dx = \frac{1}{p} = \mathcal{L}1.$$

O sea:

$$\mathcal{L} \frac{|x+\alpha|}{x+\alpha} = \frac{1}{p}; \qquad \alpha > 0, \quad p > 0. \tag{7.1b}$$

Si $\alpha = 0$, tendremos también

$$\mathcal{L} \frac{|x|}{x} = \frac{1}{p}; \qquad p > 0.$$

Ejemplos:

1º) Transformada de la escalonada

$$f(x) = -\frac{2}{3} \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{1}{3} \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{2}{3}.$$

Es

$$\mathcal{L}f(x) = -\frac{2}{3}\mathcal{L}\frac{|x+2|}{x+2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{|x-2|}{x-2} + \mathcal{L}\frac{2}{3}.$$

Las transformadas de

$$\frac{|x \pm 2|}{x \pm 2}$$

se obtienen aplicando directamente las fórmulas (7.1b) y (7.1a), que deben ser tabuladas. Resulta:

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{3p}(2e^{-2p} - 1).$$

A este mismo resultado se llega observando que en $(0, +\infty)$ la escalonada consta de los trozos $y = -\frac{1}{3}$ en (0,2), $y = \frac{1}{3}$ en $(2, +\infty)$. La transformada será

$$\mathcal{L}f(x) = -\frac{1}{3}\int_0^2 e^{-px}\,dx + \frac{1}{3}\int_2^\infty e^{-px}\,dx = \frac{1}{3p}(2e^{-2p} - 1).$$

2º) La función $Y(x - \alpha)$ de Heaviside, o escalón unidad en $\alpha > 0$, vale cero en $(-\infty, \alpha)$ y es igual a la unidad en $(\alpha, +\infty)$. Puede o no estar definida en $x = \alpha$, lo cual es indiferente para la transformación de Laplace. Como cualquier escalonada acotada, cumple las condiciones de existencia. Su transformada puede obtenerse directamente de la definición, pues será

$$\mathcal{L}Y(x-\alpha) = \int_0^\infty e^{-px}Y\,dx = \left(\int_0^\alpha + \int_\alpha^\infty\right)e^{-px}Y\,dx =$$

$$= \int_\alpha^\infty e^{-px}dx = \frac{1}{p}e^{-\alpha p}; \qquad p > 0.$$

Pero conviene dar unidad a todas las escalonadas, prescindiendo de su enunciación por trozos. Es preferible obtener su expresión simbólica equivalente

$$\sum_1^n a_j \frac{|x - x_j|}{x - x_j} + b,$$

y operar con ella. Como ya se ha tabulado las transformadas de las funciones $\frac{|x \pm \alpha|}{x \pm \alpha}$, $\alpha > 0$, basta aplicar a cada una de las que figuran en la ecuación de la escalonada las fórmulas (7.1b) y (7.1a). La función de Heaviside $Y(x - \alpha)$ tiene una expresión de la forma

$$Y(x-\alpha) = a\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha} + b,$$

donde a y b se obtienen rápidamente: $a = b = \frac{1}{2}$. Es decir:

$$Y(x-\alpha) = \frac{1}{2}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha} + \frac{1}{2}; \qquad \alpha > 0.$$

Su transformada será

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{2}\mathcal{L}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha} + \mathcal{L}\frac{1}{2} = \frac{1}{2p}(2e^{-\alpha p} - 1) + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}e^{-\alpha p}.$$

7.2. Transformadas de algunas funciones elementales

Transformada de e^{ax}

Es $\mathcal{L}e^{ax} = \int_0^\infty e^{-px}e^{ax}dx = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}dx.$

La integral es convergente para $p > a$. Luego

$$\mathcal{L}e^{ax} = \frac{1}{p-a}, \qquad p > a.$$

Si a es negativo, habrá valores negativos de p para los cuales la integral existe.

Como una exponencial de base cualquiera positiva puede reducirse a otra de base e, tendremos:

$$\mathcal{L}b^{ax} = \mathcal{L}e^{(a\ln b)x} = \frac{1}{p - a\ln b}; \qquad p > a\ln b, \quad b > 0.$$

Transformada del seno y coseno circulares

Tenemos:

$$\mathcal{L}\operatorname{sen} bx = \int_0^\infty e^{-px}\operatorname{sen} bx\,dx = -\frac{1}{b}\frac{\cos bx}{e^{px}}\bigg|_0^\infty - \frac{p}{b}\int_0^\infty e^{-px}\cos bx\,dx.$$

Ya se advierte que las integrales existen para $p > 0$. La parte integrada del último miembro tiende a cero cuando $x \to \infty$ (el numerador está acotado), y es $-\frac{1}{b}$ en $x = 0$. La última integral es la transformada de $\cos bx$. Así, pues,

$$\mathcal{L}\operatorname{sen} bx = \frac{1}{b} - \frac{p}{b}\mathcal{L}\cos bx,$$

que puede escribirse:

$$b\mathcal{L}\operatorname{sen} bx + p\mathcal{L}\cos bx = 1. \tag{7.2a}$$

Esta fórmula relaciona las transformadas del seno y del coseno del mismo ángulo. Integrando por partes $\mathcal{L}\cos bx = \int_0^\infty e^{-px}\cos bx\,dx$ tenemos, sustituyendo:

$$b\mathcal{L}\operatorname{sen} bx + \frac{p^2}{b}\mathcal{L}\operatorname{sen} bx = 1,$$

o sea:

$$\mathcal{L}\operatorname{sen} bx = \frac{b}{p^2 + b^2}; \qquad p > 0.$$

Conocida ya la transformada de $\operatorname{sen} bx$, puede obtenerse la de $\cos bx$ utilizando la fórmula (7.2a), y resulta:

$$\mathcal{L}\cos bx = \frac{p}{p^2 + b^2}; \qquad p > 0.$$

7.3. Transformada de una función periódica

Sea f una función periódica de período mínimo $T > 0$. Llamaremos t a la variable independiente, que en los procesos físicos periódicos representa el tiempo. O sea: $f(t) = f(t + nT)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Suponemos que $f(t)$ es continua o continua a trozos en $(nT, (n+1)T)$ y tiene límite finito en ambos extremos desde el interior. La transformada de $f(t)$ es

$$\mathcal{L}f(t) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \left(\int_0^T + \int_T^{2T} + \ldots \right) e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Es decir:

$$\mathcal{L}f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{7.3a}$$

En esta integral genérica I_n hagamos $t = x + nT$, con lo cual los límites de la integral son ahora cero y T. Será, pues:

$$I_n = \int_0^T e^{-px - npT} f(x + nT)\, dx.$$

Puesto que f es periódica de período T, es claro que $f(x + nT) = f(x)$, ya que el símbolo de la variable es indiferente. Por lo tanto,

$$I_n = e^{-npT} \int_0^T e^{-px} f(x)\, dx.$$

Aquí sigue siendo indiferente el símbolo de la variable en el integrando, y podemos poner:

$$I_n = e^{-npT} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt.$$

Entonces, la transformada de $f(t)$ dada por la expresión (7.3a) queda así:

$$\mathcal{L}f(t) = \left(\int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}.$$

Pero

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-npT}$$

es una serie geométrica si $e^{-pT} < 1$, cosa que ocurre si es $p > 0$. Entonces resulta:

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (7.3b)$$

Ejemplo:

La función $f(t) = \dfrac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t}$ es periódica de período $T = 2\pi$; vale 1 cuando el seno es positivo y -1 cuando es negativo. En el interior de cada período y en sus extremos hay, pues, un salto finito donde no está definida. Está acotada. Por tanto, existe su transformada de Laplace. Para obtenerla aplicaremos la fórmula (7.3b), y tendremos:

$$\mathcal{L}\frac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \int_0^{2\pi} e^{-pt} \frac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Como la función salta en $t = \pi \in (0, 2\pi)$ pasando de $+1$ a -1, será:

$$\mathcal{L}\frac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi p}} \left(\int_0^{\pi} e^{-pt}\, dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-pt}\, dt \right) = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-\pi p}}{1 + e^{-\pi p}}; \qquad p > 0.$$

Con las transformadas obtenidas hasta aquí puede iniciarse una tabla, que se irá ampliando después de estudiar algunas propiedades que nos van a permitir hallar con cierta rapidez las transformadas de otras funciones.

8. PROPIEDADES DE ALGUNAS TRANSFORMADAS

Vimos en los parágrafos 4 y 5 que las transformadas de las derivadas y de la integral de $f(x)$ vienen dadas en función de la transformada de $f(x)$. Análogamente, hay otras funciones en las que interviene $f(x)$ cuyas transformadas pueden ser obtenidas conociendo sólo $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$.

8.1. Propiedades de traslación

Vamos a hallar $\mathcal{L}e^{ax}f(x)$ conociendo $\mathcal{L}f(x)$. Tenemos:

$$\mathcal{L}e^{ax}f(x) = \int_0^\infty e^{-px}e^{ax}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-(p-a)x}f(x)\,dx.$$

Pero el último miembro es la transformada de $f(x)$ con el núcleo $e^{-(p-a)x}$; es decir, que si

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx = \varphi(p),$$

será

$$\mathcal{L}e^{ax}f(x) = \varphi(p-a).$$

La función $\varphi(p-a)$ es una traslación de $\varphi(p)$ en la dirección del eje p.

Por ejemplo, la transformada del coseno hiperbólico de x es

$$\mathcal{L}\mathrm{ch}x = \frac{p}{p^2-1} = \varphi(p),$$

como se comprueba fácilmente. Entonces será:

$$\mathcal{L}e^x\mathrm{ch}x = \varphi(p-1) = \frac{p-1}{(p-1)^2-1} = \frac{p-1}{p(p-2)}.$$

Veamos ahora otra propiedad de traslación. Sea $g(x)$ una función cuya transformada de Laplace es $\varphi(p)$. Formulemos la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x < a \quad (a > 0) \\ g(x-a) & \text{para} \quad x \geqslant a. \end{cases}$$

La transformada de $f(x)$ será:

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty e^{-px}f(x)\,dx = \int_a^\infty e^{-px}g(x-a)\,dx.$$

En la última integral hagamos $x = t + a$. Tendremos:

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty e^{-pt-pa}g(t)\,dt = e^{-pa}\int_0^\infty e^{-pt}g(t)\,dt.$$

Pero la integral del último miembro es la transformada de g. Así, pues:

$$\mathcal{L}f(x) = e^{-ap}\,\mathcal{L}g(x) = e^{-ap}\varphi(p).$$

Por ejemplo, consideremos la función $g(x) = \cos x$, y definamos esta otra

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x > \dfrac{\pi}{2} \\ g\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{para} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

La fórmula anterior nos da:

$$\mathcal{L}f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}p}\,\mathcal{L}\cos x = \frac{p}{e^{\frac{\pi}{2}p}(p^2+1)}.$$

8.2. Transformada de $f(kx)$

Supongamos que $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$. La transformada de $f(kx)$, $k > 0$, es:

$$\mathcal{L}f(kx) = \int_0^\infty e^{-px} f(kx)\,dx.$$

Hagamos $kx = t \Rightarrow dx = \frac{1}{k}dt$. Con este cambio, los límites de la integral no varían, por suponer $k > 0$. Tendremos:

$$\mathcal{L}f(kx) = \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{k}t} f(t)\,dt.$$

Esta integral es la transformada de f respecto del núcleo $e^{-\frac{p}{k}t}$, en el cual p está sustituido por p/k. Así, pues:

$$\mathcal{L}f(kx) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{p}{k}\right).$$

Por ejemplo, como

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Sh}\,x = \mathcal{L}\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) = \frac{1}{p^2-1}; \qquad p > 0,$$

tendremos:

$$\mathcal{L}\,\mathrm{Sh}\,(2x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1} = \frac{2}{p^2-4}$$

8.3. Producto de $f(x)$ por x^n, $n \in \mathbb{N}$

Suponemos, como hasta ahora, que la función $f(x)$ tiene transformada de Laplace; es decir: $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$. Suponemos, además, que $\varphi(p)$ es sucesivamente derivable. Pues bien, con estos supuestos, puede hallarse la transformada del producto $x^n f(x)$ conociendo solamente $\varphi(p)$, siendo n un número natural.

Partiremos de la definición:

$$\int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx = \varphi(p).$$

Derivemos ambos miembros respecto de p, teniendo en cuenta que podemos derivar bajo el signo integral. Tendremos:

$$\int_o^\infty e^{-px}(-x) f(x)\,dx = \varphi'(p),$$

que podemos escribir así:

$$\int_0^\infty e^{-px} x f(x)\,dx = -\varphi'(p).$$

El primer miembro es la transformada de $xf(x)$. Derivando nuevamente respecto de p obtenemos:

$$\int_0^\infty e^{-px} x^2 f(x)\,dx = \varphi''(p).$$

Reiterando la derivación se llega a

$$\int_0^\infty e^{-px} x^n f(x)\,dx = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}(\varphi(p)).$$

Es decir:

$$\pounds\, x^n f(x) = (-1)^n \varphi^{(n}(p) \qquad (8.3a)$$

Ejemplo:

Sabiendo que

$$\pounds f(x) = \frac{1}{p^2 - 1},$$

que $f(x)$ es continua en cero y que $f(0) = 0, f'(0) = 1$, podemos hallar la transformada del producto $xf''(x)$. Tendremos que obtener primero la transformada de $f''(x)$, que es (parágrafo 4):

$$\pounds f''(x) = p^2\, \pounds f(x) - pf(0) - f'(0),$$

o sea:

$$\pounds f''(x) = \frac{p^2}{p^2 - 1} - 1 = \frac{1}{p^2 - 1}.$$

Hemos de derivar este resultado, porque $\pounds\, xf''(x) = -\frac{d}{dp}(\pounds f''(x))$. Será:

$$(\pounds f''(x))' = -\frac{2p}{(p^2-1)^2}.$$

Por lo tanto:

$$\pounds x f''(x) = \frac{2p}{(p^2-1)^2}$$

Ya se advierte en este ejemplo que $f(x) = \text{sh}x$, pues $\pounds \text{sh}x = \frac{1}{p^2-1}$.

Transformada de x^n, $n \in \mathbf{N}$

Si en el primer miembro de la igualdad (8.3a) la función $f(x)$ es la unidad, tendremos:

$$\pounds x^n = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}(\pounds 1) = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right).$$

Como

$$\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}},$$

será:

$$\pounds x^n = \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Estamos ya en condiciones de hallar la transformada de un polinomio entero, y también de una poligonal unívoca rectilínea utilizando su expresión con valores absolutos.

Ejemplo:

La transformada del polinomio

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 3$$

será:

$$\frac{1}{2}\pounds x^2 - \pounds x + \pounds 3 = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{3}{p} = \frac{3p^2 - p + 1}{p^3}.$$

Transformada de una poligonal unívoca rectilínea

Como ya vimos en el capítulo 1, 0.3, una poligonal rectilínea unívoca tiene una expresión de la forma

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j|x - x_j| + bx + c,$$

donde x_j son las abscisas de todos sus vértices. Existe su transformada de Laplace por ser $f(x)$ continua en $\mathbb{R}$ y de orden exponencial. Para hallar la transformada utilizaremos las propiedades lineales de $\mathcal{L}$ y, por lo tanto, habrá que obtener las transformadas de las funciones valoradas $|x-x_j|$. Para ello, consideremos los dos casos: $|x-\alpha|$, $|x+\alpha|$, ambos con $\alpha > 0$.

Tenemos:

$$\mathcal{L}|x-\alpha| = \int_0^\infty e^{-px}|x-\alpha|dx = \int_0^\infty e^{-px}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}(x-\alpha)\,dx.$$

Como $\alpha \in (0, +\infty)$, descompongamos la integral en suma de dos:

$$\mathcal{L}|x-\alpha| = \int_0^\alpha e^{-px}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}(x-\alpha)\,dx + \int_\alpha^\infty e^{-px}\frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}(x-\alpha)\,dx =$$

$$= -\int_0^\alpha e^{-px}(x-\alpha)\,dx + \int_\alpha^\infty e^{-px}(x-\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{1}{p^2}(2e^{-\alpha p} - 1) + \frac{\alpha}{p}; \qquad p > 0.$$

Destaquemos este resultado para su tabulación:

$$\mathcal{L}|x-\alpha| = \frac{1}{p^2}(2e^{-\alpha p} - 1) + \frac{\alpha}{p}; \qquad \alpha > 0, \quad p > 0. \tag{8.3b}$$

De manera análoga, tenemos:

$$\mathcal{L}|x+\alpha| = \int_0^\infty e^{-px}|x+\alpha|\,dx = \int_0^\infty e^{-px}\frac{|x+\alpha|}{x+\alpha}(x+\alpha)\,dx.$$

Pero es $\alpha > 0$. Luego

$$\mathcal{L}|x+\alpha| = \int_0^\infty e^{-px}(x+\alpha)\,dx = \frac{1}{p^2} + \frac{\alpha}{p}; \qquad p > 0. \tag{8.3c}$$

Si es $\alpha = 0$, será

$$\mathcal{L}|x| = \frac{1}{p^2} = \mathcal{L}x.$$

Ejemplo:

Vamos a hallar la transformada de una poligonal cuya derivada es la escalonada del ejemplo primero de 7.1. Aquella escalonada era

$$f(x) = -\frac{2}{3}\frac{|x+2|}{x+2} + \frac{1}{3}\frac{|x-2|}{x-2} + \frac{2}{3}$$

Al integrar, puede no haber vértices en $x = -2$ y $x = 2$, sino discontinuidades finitas. Para que haya vértices, recordemos que

$$\int \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}dx = \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}\int dx = \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}(x+c).$$

Si damos a c el valor $-\alpha$ nos queda $\int \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}dx = |x-\alpha|$. Hagamos esto en cada sumando de la exposición de la escalonada, y resulta:

$$\int f(x)\,dx = F(x) = -\frac{2}{3}|x+2| + \frac{1}{3}|x-2| + \frac{2}{3}x + k.$$

que es, efectivamente, una poligonal cuya derivada es la escalonada de partida. A la contante k le podemos dar cualquier valor, por ejemplo, $k = 1$. La poligonal va a ser, pues,

$$F(x) = -\frac{2}{3}|x+2| + \frac{1}{3}|x-2| + \frac{2}{3}x + 1.$$

La transformada de Laplace de esta poligonal será:

$$\mathcal{L}F(x) = -\frac{2}{3}\mathcal{L}|x+2| + \frac{1}{3}\mathcal{L}|x-2| + \frac{2}{3}\mathcal{L}x + \mathcal{L}1.$$

Aplicando las fórmulas (8.3c) y (8.3b) a $\mathcal{L}|x+2|$ y $\mathcal{L}|x-2|$ respectivamente se obtiene, después de simplificar:

$$\mathcal{L}F(x) = \frac{1}{3p}\left(\frac{2}{pe^{2p}} - \frac{1}{p} + 1\right).$$

NOTA: Obsérvese que si es $F(x) = |x-\alpha|$, $\alpha > 0$, la transformada de

$$F'(x) = \frac{|x-\alpha|}{x-\alpha}$$

cumple la propiedad

$$\mathcal{L}F'(x) = p\,\mathcal{L}F(x) - F(0),$$

pues

$$\mathcal{L}F(x) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{2}{e^{\alpha p}} - 1\right) + \frac{\alpha}{p};$$

$$p\,\mathcal{L}F(x) = \frac{2}{pe^{\alpha p}} - \frac{1}{p} + \alpha; \qquad F(0) = \alpha.$$

Luego, efectivamente:

$$p\,\mathcal{L}F(x) - F(0) = \frac{2}{pe^{\alpha p}} - \frac{1}{p} = \mathcal{L}F'(x).$$

Análogamente, con $|x + \alpha|$, $\alpha > 0$.

8.4. Transformada de $f(x)/x$

Si conocemos $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$, podemos obtener $\mathcal{L}\frac{f(x)}{x}$. Será

$$\frac{f(x)}{x} = g(x).$$

Se trata de encontrar, pues, $\mathcal{L}g(x) = \Phi(p)$. Como $f(x) = xg(x)$, tendremos:

$$\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}\,xg(x).$$

Pero sabemos que

$$\mathcal{L}\,xg(x) = -\frac{d}{dp}\,\mathcal{L}g(x) = -\Phi'(p).$$

Es decir: $\varphi(p) = -\Phi'(p)$, o lo que es lo mismo:

$$\Phi'(p) = -\varphi(p).$$

Integremos entre $+\infty$ y p:

$$\Phi(p)\Big|_{+\infty}^{p} = -\int_{+\infty}^{p} \varphi(p)\,dp = \int_{p}^{\infty} \varphi(p)\,dp.$$

O sea:

$$\Phi(p) - \lim_{p\to\infty} \Phi(p) = \int_{p}^{\infty} \varphi(p)\,dp.$$

Pero si $\Phi(p)$ es, efectivamente, la transformada de una función, será $\lim_{p\to\infty} \Phi(p) = 0$ (teorema I de 6). Luego

$$\Phi(p) = \mathcal{L}g(x) = \mathcal{L}\frac{f(x)}{x} = \int_p^\infty \varphi(p)\,dp,$$

donde $\varphi(p)$ es la transformada (conocida) de $f(x)$.

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \int_p^\infty (\mathcal{L}\operatorname{sen} x)\,dp = \int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}\,dp = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} p = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{p}.$$

9. LA DISTRIBUCION δ Y SU TRANSFORMADA

En el capítulo 1 dábamos la expresión de la escalonada unidad en (a, b), que es:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x-a|}{x-a} - \frac{|x-b|}{x-b}\right).$$

Esta función vale 1 en (a, b) y cero en $(-\infty, a)$ y en $(b, +\infty)$, y no está definida en a y b; pero en dichos puntos tiene límite 1 cuando x tiende a ellos desde el interior de (a, b). Si ponemos $b = a + h$, $(0 < a < a + h)$, y deseamos que en (a, b) la función valga $\frac{1}{h}$, en vez de valer la unidad, su expresión será:

$$g(x) = \frac{1}{2h}\left(\frac{|x-a|}{x-a} - \frac{|x-(a+h)|}{x-(a+h)}\right) \tag{9a}$$

Es evidente que la integral

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx$$

es igual a 1 cualquiera que sea $h > 0$, cosa que también puede constatarse efectuando la integración de (9a):

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_a^{a+h} \frac{1}{2h}\left(\frac{|x-a|}{x-a} - \frac{|x-(a+h)|}{x-(a+h)}\right)dx = \frac{1}{2h}(h+h) = 1.$$

Si en (9a) hacemos que h tienda a cero, $g(x)$ tiende a la forma indeterminada $\infty \cdot 0$. Ahora bien, teniendo en cuenta que a medida que h se hace más pequeño la altura $1/h$ del rectángulo no cerrado de base h se hace más grande, se intuye que para $h = 0$ es $g(x) = \infty$.

Este comportamiento de $g(x)$ cuando h es nulo nos conduce fuera del marco de la teoría de funciones, pues algo que es cero en todo $x \in \mathbb{R}$ excepto en un punto $x = a$, donde es infinito y, al mismo tiempo, la integral de ese algo en $\mathbb{R}$ es, por límite,

la unidad, no es ciertamente una función. Se trata, en suma, de la δ de Dirac, que quedó incluida más tarde en las *distribuciones* de L. Schwartz, como ya dijimos en la introducción del capítulo 1.

También en dicho capítulo dijimos que una distribución T es un funcional lineal y continuo sobre el espacio vectorial de las funciones φ indefinidamente derivables con soporte compacto. Una distribución T hace corresponder a cada función φ un número real. La notación de esta correspondencia es $\langle T, \varphi \rangle$. En el caso de la distribución δ (cuando $a = 0$) se define así: $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$. Para otro $a \neq 0$ es, también por definición, $\langle \delta_a . \varphi \rangle = \varphi(a)$.

Recordemos asimismo que si f es una función sumable sobre todo intervalo cerrado de la recta real, f define una distribución dada por

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\, dx.$$

La transformada de Laplace de δ_a sobre C^∞ ($\mathbb{R}$) (suele escribirse también $\delta(x-a)$, ó δ_{x-a}) se obtiene definiendo primero la transformación de Laplace de una distribución y viendo las condiciones de existencia. Pero no lo vamos a hacer así, sino que hallaremos la transformada de la escalonada (9a), y haremos tender después h a cero. Aplicando a (9a) las propiedades lineales de $\mathcal{L}$ y recordando la fórmula (7.1a) tenemos:

$$\mathcal{L}g(x) = \frac{1}{2h}\left(\frac{2e^{-ap}}{p} - \frac{1}{p} - \frac{2e^{-(a+h)p}}{p} + \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-ap}(1 - e^{-hp})}{ph}.$$

Se ha podido hacer también directamente:

$$\mathcal{L}g = \int_o^\infty e^{-px} g(x)\, dx = \frac{1}{h}\int_a^{a+h} e^{-px} dx.$$

Para hallar el límite de esta transformada cuando h tiende a cero aplicaremos al resultado la regla de L'Hôpital; nos da

$$\lim_{h \to 0} \mathcal{L}g(x) = \mathcal{L}\delta_a = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-ap} p e^{-ph}}{p} = e^{-ap}.$$

Como hemos supuesto $a > 0$, el comportamiento de esta transformada cuando $p \to +\infty$ corresponde al de la transformada de una función. Si es $a = 0$, nos queda $\mathcal{L}\delta = 1$. Aquí la transformada no se comporta como la de una función.

9.1. Transformada de la derivada de una escalonada en el sentido de las distribuciones

Veamos primero cuál es la derivada de una escalonada según las distribuciones. Elegiremos la más sencilla,

$$f(x) = \frac{|x-a|}{x-a},\ a > 0,$$

porque es la que aparece en las escalonadas que tienen varios saltos en $\mathbb{R}^+$. La función $f(x)$ es integrable sobre cualquier intervalo cerrado, y tiene un salto en $x = a$ de oscilación 2. Su derivada es cero $\forall x \neq a$, donde no está definida. También es cero en a si admitimos el convenio que sirve de base al capítulo 1. Pero en el sentido de las distribuciones tenemos (cap. 1):

$$\langle f', \varphi\rangle = -\langle f, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x-a|}{x-a}\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left(-\int_{-\infty}^{a} \varphi'(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} \varphi'(x)\,dx\right) = \varphi(x)|_{-\infty}^{a} - \varphi(x)|_{a}^{\infty}\ .$$

Como $\varphi(x)$ tiene soporte compacto, es nula cuando x alcanza $\pm\infty$, y nos queda:

$$\langle f', \varphi\rangle = 2\varphi(a) = \langle 2\delta_a, \varphi\rangle.$$

Por lo tanto:

$$f'(x) = 2\delta_a.$$

Su transformada de Laplace será, pues (parágrafo 9):

$$\mathcal{L}f'(x) = 2e^{-ap}.$$

Acabamos de ver que la derivada de una escalonada, según las distribuciones, no es idénticamente nula, sino igual a

$$\sum_{1}^{n} \lambda_j \delta_{a_j},$$

donde a_j son los puntos de discontinuidad de la escalonada y λ_j las oscilaciones respectivas. La transformada de esta derivada es, por lo tanto,

$$\sum_{1}^{n} \lambda_j e^{-a_j p}.$$

En el ejemplo segundo de 7.1 hallábamos la transformada de la función $Y(x-a)$ de Heaviside. La derivada de $Y(x-a)$ es:

$$\langle Y', \varphi \rangle = -\langle Y, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} Y(x-a)\varphi'(x)\,dx = -\int_{a}^{\infty} Y(x-a)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_{a}^{\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_{a}^{\infty} = \varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle.$$

Luego $Y'(x-a) = \delta_a$. Su transformada será, pues, $\mathcal{L}Y'(x-a) = e^{-ap}$.

En general, si $f(x)$ es derivable a trozos, separados por puntos de discontinuidad finita, la derivada de $f(x)$ según las distribuciones introduce en cada salto un sumando igual a $\lambda_a \delta_a$, siendo a el punto de discontinuidad y λ_a la oscilación de $f(x)$ en a. El sumando principal de la derivada es lo que se obtiene con los recursos del capítulo 1.

10. CONVOLUCION

Sean f y g dos funciones continuas que están definidas para valores no negativos de la variable. Llamamos *convolución* de f y g, y la representamos por $f * g$, a la función dada por la integral

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt \tag{10a}$$

La convolución tiene la propiedad conmutativa; es decir: $f * g = g * f$. En efecto, si en (10a) hacemos el cambio $x - t = s$, donde s es la nueva variable, será $t = x - s$ y $dt = -ds$. La expresión (10a) es ahora

$$(f * g)(x) = -\int_x^0 f(s)g(x-s)\,ds = \int_0^x g(x-s)f(s)\,ds = (g * f)(x).$$

Por ejemplo, la convolución de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ es

$$(f * g)(x) = \int_0^x (x-t)e^t dt = e^x - x - 1.$$

A este mismo resultado se llega con

$$(g * f)(x) = \int_0^x e^{x-t} t\,dt.$$

La convolución tiene un papel importante en la transformación de Laplace, porque muchas veces es posible obtener una función $F(x)$, cuya transformada se conoce, si aplicamos la definición (10a) a dos funciones convenientemente elegidas.

Para ello, vamos a demostrar un teorema fundamental con la hipótesis de que $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que admiten transformada de Laplace.

10.1. Teorema

El producto de las transformadas de dos funciones f y g es igual a la transformada de la convolución de f y g.

Demostración:

Sea

$$\mathcal{L}f = \alpha(p) \text{ y } \mathcal{L}g = \beta(p).$$

Para evitar confusiones en el cálculo que va a seguir, llamaremos u y v respectivamente a las variables de f y g. Por lo tanto:

$$\alpha(p) = \mathcal{L}f(u) = \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,du; \qquad \beta(p) = \mathcal{L}g(v) = \int_0^\infty e^{-pv} g(v)\,dv.$$

El producto de ambas transformadas es:

$$\alpha(p)\beta(p) = (\mathcal{L}f(u))(\mathcal{L}g(v)) = \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,du \int_0^\infty e^{-pv} g(v)\,dv =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\int_0^a e^{-pu} f(u)\,du \int_0^a e^{-pv} g(v)\,dv \right) =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \int_0^a e^{-p(u+v)} f(u)\,g(v)\,du\,dv =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+v)} f(u)\,g(v)\,du\,dv = \int\int_R e^{-p(u+v)} f(u)\,g(v)\,du\,dv.$$

Esta integral doble es absolutamente convergente, por serlo las simples impropias que dan $\alpha(p)$ y $\beta(p)$. El recinto R de integración es, evidentemente, el primer cuadrante del plano $(0 : u, v)$.

En la integral del último miembro sustituyamos las variables u, v por otras x, t mediante el cambio

$$\begin{cases} u = x - t \\ v = t \end{cases} \tag{10.1a}$$

Tendremos:

$$\int\int_R e^{-p(u+v)} f(u)\,g(v)\,du\,dv = \int\int_{R'} e^{-px} f(x-t) g(t) |J|\,dx\,dt,$$

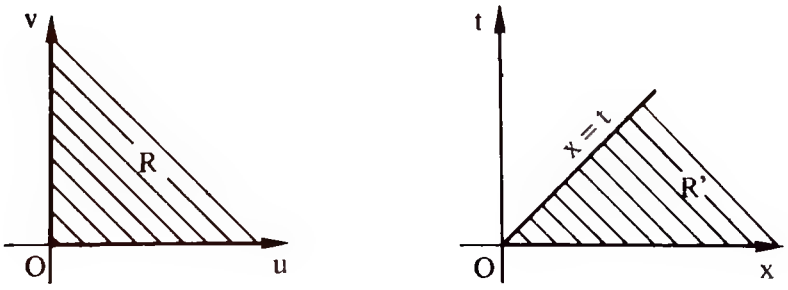
donde J es el jacobiano de la transformación; es decir:

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

o sea, $|J| = 1$. Por lo tanto:

$$(\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g) = \int \int_{R'} e^{-px} f(x - t) g(t)\, dx\, dt \qquad (10.1b)$$

Veamos cuál es el recinto R' transformado del recinto R (figura).



Las semirrectas que limitan R son los semiejes positivos del plano $(0 : u, v)$. El eje $v(u = 0)$ se transforma mediante (10.1a) en la recta $x = t$ del plano $(0 : x, t)$. El eje $u(v = 0)$ se transforma en $t = 0$, es decir, en el eje x de dicho plano. Por otra parte, todo punto $P(a, b) \in R$ se transforma en $P'(a + b, b)$; y por ser a y b positivos o nulos es $a + b \geqslant b$. Luego P' pertenece al recinto rayado del plano $(0 : x, t)$. Dicho recinto es, pues, R'. Por lo tanto, en la integral de (10.1b), x varía entre cero y $+\infty$, y t varía entre cero y x. Tendremos:

$$(\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g) = \int_0^\infty e^{-px} \left(\int_0^x f(x - t) g(t)\, dt \right) dx.$$

La integral entre paréntesis es la convolución de f y g. Luego

$$(\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g) = \mathcal{L}(f * g),$$

c.q.d.

Aplicación: Un problema de tipo general es el siguiente: Supongamos que deseamos obtener una función $F(x)$ cuya transformada de Laplace $\varphi(p)$ conocemos.

Supongamos también que es posible descomponer $\varphi(p)$ en el producto de dos funciones $\alpha(p)$ y $\beta(p)$ que son transformadas de funciones *conocidas* $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente. Podemos escribir:

$$\mathcal{L}F(x) = \varphi(p) = \alpha(p)\beta(p) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g).$$

Como el último miembro es un producto de dos transformadas, aplicaremos el teorema precedente, y nos queda:

$$\mathcal{L}F(x) = \mathcal{L}\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt,$$

lo cual implica (salvo la consideración de funciones "nulas", como veremos después):

$$F(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)\,dt.$$

Por lo tanto, con las hipótesis establecidas, es posible obtener $F(x)$ como convolución de f y g.

Por ejemplo, tratemos de hallar la función $f(x)$ cuya transformada es

$$\varphi(p) = \frac{p}{p^3 - p^2 + p - 1}.$$

El denominador tiene las raíces 1 y $\pm i$, y será, pues,

$$\varphi(p) = \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Podemos descomponer $\varphi(p)$ del siguiente modo:

$$\varphi(p) = \frac{1}{p-1}\frac{p}{p^2+1}.$$

Las dos fracciones del segundo miembro son transformadas de funciones conocidas, pues sabemos (apartado 7.2) que

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}e^x, \qquad \frac{p}{p^2+1} = \mathcal{L}\cos x.$$

Luego

$$F(x) = e^x * \cos x = \int_0^x e^{x-t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x).$$

11. TRANSFORMACION INVERSA

Si es $\mathcal{L}f(x) = \varphi(p)$, la transformación inversa de Laplace es un operador que actuando sobre $\varphi(p)$ nos da $f(x)$. Usaremos la notación $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$. Llamaremos a $f(x)$ *transformada inversa* de $\varphi(p)$.

De una manera general, se trata de resolver la ecuación

$$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx,$$

donde la incógnita es la función $f(x)$ que, además, está bajo el signo integral. Las ecuaciones de este tipo reciben el nombre de *ecuaciones integrales*, y no las estudiamos aquí.

Sólo a título de información diremos que si p es una variable compleja $p = \alpha + \beta i$, una fórmula de inversión que nos da directamente $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$ es

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\beta \to \infty} \int_{\alpha - \beta i}^{\alpha + \beta i} e^{px} \varphi(p) dp.$$

El cálculo de la integral $\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty}$ se hace por medio de los residuos. Y como el estudio de las funciones de variable compleja no ha sido incluido en este libro, es claro que no vamos a manejar la anterior fórmula de inversión.

Hay otros procedimientos que nos permiten hallar transformadas inversas, y que son suficientes en una gran parte de los problemas que se presentan en la práctica. Uno de ellos es, por ejemplo, la convolución, como hemos visto en el parágrafo 10. Otro es el empleo de una tabla de transformadas. Cuando se trata de transformadas que son cocientes de polinomios en p, se descompone la fracción en suma de fracciones simples, cosa que veremos después.

11.1. Unicidad de la transformada inversa

Decimos que $0(x)$ es una función nula si $\int_0^x 0(t)\, dt = 0$ para todo $x > 0$. Es evidente que si $0(x)$ es idénticamente nula en todo $(0, x)$, la integral es cero. Pero también lo es si $0(x)$ es nula en todo $(0, x)$ excepto en un número finito de puntos. También ocurriría lo mismo si $0(x)$ no fuera nula en un conjunto finito, pero numerable, de puntos de $(0, x)$. La función de Dirichlet, que es cero cuando x es irracional y vale 1 cuando x es racional, es una función nula, puesto que el conjunto de los x racionales es numerable; pero dicha función no es integrable Riemann (es cero su integral de Lebesgue). Así, pues, entre todas las funciones nulas, sólo es continua la que es nula idénticamente.

Consideraremos aquí las funciones nulas que son integrables según Riemann. En tal caso, toda función nula tiene transformada de Laplace, que es cero. Ocurre entonces

que hay infinito número de funciones que tienen transformada cero; pero sólo una de ellas es continua.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones que tienen la misma transformada de Laplace $\varphi(p)$, la diferencia $f(x) - g(x)$ es una función nula. Pues de

$$\mathcal{L}f(x) = \varphi(p) \text{ y } \mathcal{L}g(x) = \varphi(p)$$

se sigue:

$$\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}g(x) = \mathcal{L}(f(x) - g(x)) = 0.$$

El último miembro, cero, es la transformada de una función nula $0(x)$. Luego

$$f(x) - g(x) = 0(x).$$

Si $0(x)$ es idénticamente nula, será $f(x) = g(x)$. Si $0(x)$ no lo es, entonces $f(x)$ y $g(x)$ toman los mismos valores, excepto en puntos aislados. Así, pues, si hay una función *continua* $f(x)$ cuya transformada es $\varphi(p)$, dicha función $f(x)$ es la única transformada inversa continua de $\varphi(p)$. Esta es una manera de expresar el llamado *teorema de Lerch.*

11.2. Transformadas inversas de ciertas funciones racionales algebraicas

En muchos problemas tecnológicos, cuando en ellos es posible aplicar la transformación de Laplace, se llega a transformadas de la forma $\varphi(p) = \dfrac{N(p)}{D(p)}$, donde $N(p)$ y $D(p)$ son polinomios en p sin ceros comunes. En tal caso, el polinomio $D(p)$ será forzosamente de grado mayor que el de $N(p)$, pues en virtud del teorema I del parágrafo 6, ha de verificarse $\lim_{p\to\infty} \varphi(p) = 0$ si, efectivamente, $\varphi(p)$ es la transformada de Laplace de una *función.*

Para hallar $\mathcal{L}^{-1}\varphi(p)$, descomponemos $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ en suma de fracciones simples, atendiendo a las raíces de la ecuación $D(p) = 0$. Los tipos de fracciones que se pueden presentar en la descomposición son los siguientes:

a) Raíces reales simples: $\dfrac{A}{p-a}$.

b) Raíces reales múltiples: $\dfrac{A}{(p-a)^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

c) Raíces imaginarias simples: $\dfrac{Mp+N}{(p-a)^2+b^2}$.

d) Raíces imaginarias múltiples: $\dfrac{Mp+N}{\left((p-a)^2+b^2\right)^m}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

Sabiendo hallar las transformadas inversas de estos cuatro tipos de fracciones sabremos encontrar $\mathcal{L}^{-1}\varphi(p) = f(x)$ utilizando las propiedades lineales de $\mathcal{L}^{-1}$.

Caso a)

En 7.2 vimos que la transformada de una exponencial e^{ax} es $\frac{1}{p-a}$, con $p > a$. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{A}{p-a} = A\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p-a} = Ae^{ax}.$$

Caso b)

En 8.3 vimos que $\mathcal{L}x^n = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$; y en 8.1 expusimos una propiedad de traslación según la cual es

$$\mathcal{L}e^{ax}f(x) = \varphi(p-a), \text{ si } \varphi(p)$$

es la transformada de $f(x)$. Combinando estas dos cosas tendremos:

$$\mathcal{L}e^{ax}x^n = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Luego

$$\mathcal{L}e^{ax}x^{m-1} = \frac{(m-1)!}{(p-a)^m}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{A}{(p-a)^m} = \frac{A}{(m-1)!}\mathcal{L}^{-1}\frac{(m-1)!}{(p-a)^m} = \frac{A}{(m-1)!}e^{ax}x^{m-1}.$$

Caso c)

Tenemos sucesivamente:

$$\frac{Mp+N}{(p-a)^2+b^2} = M\frac{p}{(p-a)^2+b^2} + N\frac{1}{(p-a)^2+b^2} =$$

$$M\frac{p-a+a}{(p-a)^2+b^2} + N\frac{1}{(p-a)^2+b^2} =$$

$$= M\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} + \frac{Ma+N}{b}\frac{b}{(p-a)^2+b^2}.$$

Recordando que

$$\mathcal{L}\cos bx = \frac{p}{p^2+b^2},$$

será

$$\mathcal{L}e^{ax}\cos bx = \frac{p-a}{(p-a)^2+b^2};$$

es decir:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2} = e^{ax}\cos bx.$$

Análogamente, tendremos:

$$\mathcal{L}e^{ax}\operatorname{sen} bx = \frac{b}{(p-a)^2+b^2};$$

o sea:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{b}{(p-a)^2+b^2} = e^{ax}\operatorname{sen} bx.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{Mp+N}{(p-a)^2+b^2} = Me^{ax}\cos bx + \frac{Ma+N}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx.$$

También podíamos haber razonado del siguiente modo: Si

$$\frac{Mp+N}{(p-a)^2+b^2} = \mathcal{L}f(x),$$

entonces (primera propiedad de traslación) será:

$$\mathcal{L}e^{-ax}f(x) = \frac{M(p+a)+N}{p^2+b^2} = M\frac{p}{p^2+b^2} + \frac{Ma+N}{b}\frac{b}{p^2+b^2}.$$

Tomando transformadas inversas, tendremos:

$$e^{-ax}f(x) = M\cos bx + \frac{Ma+N}{b}\operatorname{sen} bx;$$

y multiplicando por e^{ax} obtenemos $f(x)$ con el mismo resultado anterior.

Caso d)

Sólo vamos a considerar tres tipos de fracciones que aparecen con mucha frecuencia en los problemas. Son los siguientes:

1°) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}$;

2°) $\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$;

3°) $\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}$.

Para hallar la transformada inversa de una fracción del tipo primero utilizaremos el recurso de la convolución. Podemos descomponer la fracción así:

$$\frac{p}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{a}\frac{a}{p^2+a^2}\frac{p}{p^2+a^2}$$

Y como

$$\frac{1}{a}\frac{a}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax, \text{ y } \frac{p}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\cos ax,$$

será:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{(p^2+a^2)^2} = \left(\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax\right) * (\cos ax) =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^x \operatorname{sen}(ax-at)\cos at\, dt = \frac{1}{2a}x \operatorname{sen} ax.$$

Para obtener la transformada inversa del segundo tipo, vamos a utilizar el resultado anterior:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}x\operatorname{sen} ax = F(x).$$

O sea:

$$\mathcal{L}F(x) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen} ax\right) = \frac{p}{(p^2+a^2)^2}.$$

Recordando que

$$\mathcal{L}F'(x) = p\,\mathcal{L}F(x) - F(0),$$

tendremos:

$$\mathcal{L}F'(x) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2a}\operatorname{sen} ax + \frac{1}{2}x\cos ax\right) = \frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}.$$

Es decir:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{sen} ax + \frac{1}{2}x\cos ax.$$

Finalmente, la transformada inversa de la fracción del tercer tipo se obtiene por convolución, descomponiendo la fracción del siguiente modo:

$$\frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\frac{a}{p^2+a^2}\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Y como $\frac{a}{p^2+a^2} = \mathcal{L}\operatorname{sen} ax$, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^x \operatorname{sen}(ax-at)\operatorname{sen} at\, dt =$$

$$\frac{1}{2a^3}\operatorname{sen} ax - \frac{1}{2a^2}\, x\cos ax.$$

Con todo lo hecho hasta aquí, y considerando otras funciones de p tratadas bien por convolución, bien utilizando las propiedades ya estudiadas, puede formarse una tabla de transformadas lo suficientemente amplia para poder resolver los problemas más frecuentes.

Nosotros nos limitamos a incluir aquí una tabla con las transformadas obtenidas en el texto, dadas en el mismo orden en que han sido halladas, y algunas transformadas más que son fácilmente deducibles. Por eso, en la columna de la izquierda escribimos las funciones (y algunas distribuciones) que hemos considerado, y en la columna de la derecha sus transformadas. Generalmente se hace lo contrario, porque el que usa las tablas trata casi siempre de hallar la transformada inversa de una función de p de la cual dispone.

12. INTEGRALES DE LA FORMA $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx$

Mediante la transformación de Laplace pueden ser resueltas algunas integrales de la forma $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx$. Para ello vamos a partir de la definición de la transformada de $f(x)$, suponiendo que exista:

$$\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx = \varphi(p).$$

Integremos entre cero e infinito, *respecto de p*, los dos últimos miembros. Será:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx dp = \int_0^\infty \varphi(p)\, dp.$$

En el primer miembro podemos distribuir el orden de integración, y tenemos:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \int_0^\infty e^{-px}dp = \int_0^\infty \varphi(p)\,dp.$$

La integral interior del primer miembro es

$$\int_0^\infty e^{-px}dp = \frac{1}{x}; \qquad x > 0, \quad p > 0.$$

Nos queda, pues:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \varphi(p)\,dp.$$

Ahora bien, esta última igualdad puede carecer de sentido. Por ejemplo, si es $f(x) = e^x$, el primer miembro es el logaritmo integral, que no converge. Para que el cálculo que nos ha conducido a dicha igualdad sea correcto es necesario que

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$$

sea convergente. La igualdad tiene sentido si existen las integrales de ambos miembros.

Ejemplos:

$$1^o)\ \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^\infty (\pounds \operatorname{sen} x)\,dp = \int_0^\infty \frac{dp}{1+p^2} = \operatorname{arc\,tg} p\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

$$2^o)\ \int_0^\infty \frac{1}{x}(e^{-2x} - e^{-x})\,dx = \int_0^\infty \pounds(e^{-2x} - e^{-x})\,dp = \int_0^\infty \left(\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1}\right) dp =$$
$$= \ln\frac{p+2}{p+1}\Big|_0^\infty = \ln\frac{1}{2}.$$

13. LA FUNCION GAMMA DE EULER

La representamos por $\Gamma(n)$ y la vamos a definir de la siguiente manera:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx \tag{13a}$$

Para que esta integral exista tiene que ser $n > 0$. Aun con ello, no es posible expresarla mediante funciones de n elementales; pero como esta función se presenta en numerosos problemas, ha sido tabulada para cierto conjunto de valores de n positivos y no necesariamente naturales.

Si en (13a) sustituimos n por $n + 1$, será:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx.$$

Integrando por partes:

$$\Gamma(n+1) = -x^n e^{-x}\Big|_0^\infty + n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} \, dx = n\Gamma(n); \qquad n > 0.$$

Tenemos, pues, la fórmula de recurrencia

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \tag{13b}$$

Cuando es $n = 1$, la definición (13a) nos da

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \, dx = 1.$$

Y aplicando la fórmula (13b) se va obteniendo

$$\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1, \ \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2, \ \Gamma(4) =$$

$$= 3\Gamma(3) = 3!, \ldots, \ \Gamma(n \in \mathbb{N}) = (n-1)!$$

Es decir, cuando n es una variable natural, la función gamma se identifica con la factorial. Formalmente, es una factorial generalizada.

Para cualquier n positivo no necesariamente natural, conociendo $\Gamma(n)$, podemos utilizar la fórmula de recurrencia, que nos da sucesivamente:

$$\Gamma(n+2) = (n+1)n\Gamma(n); \qquad \Gamma(n+3) = (n+2)(n+1)n\Gamma(n); \qquad \ldots$$

En general, por inducción,

$$\Gamma(n+m) = (n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+2)(n+1)n\Gamma(n), \tag{13c}$$

donde m es natural y n no lo es.

Cuando es $n < 0$, ya hemos dicho que la integral de la definición (13a) no existe. A pesar de ello, se supone que la fórmula de recurrencia (13b) es cierta para valores negativos de n. Para todo $n < 0$ hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que $n + m$ figura en las tablas, basándose en (13c).

La función gamma aparece al hallar la transformada de Laplace de la potencial t^n, pues en

$$\mathcal{L}t^n = \int_0^\infty e^{-pt} t^n \, dt$$

podemos hacer $t = \frac{1}{p}x$, y nos queda:

$$\mathcal{L}t^n = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^n \, dx; \qquad n > -1.$$

Si en esta integral sustituimos n por $n - 1$, tenemos:

$$\mathcal{L}t^{n-1} = \frac{1}{p^n} \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx; \qquad n > 0.$$

La integral que figura en la igualdad anterior es la función gamma, o integral euleriana de segunda especie.

TABLA DE TRANSFORMADAS

	Funciones	Transformadas
	$f(x)$	$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\,dx; \qquad p \in \mathbb{R}$
1.	$f'(x)$	$p\varphi(p) - f(0+)$
2.	$f''(x)$	$p^2\varphi(p) - pf(0+) - f'(0+)$
3.	$f^{(n}(x)$	$p^n\varphi(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+) - \cdots$ $\cdots - pf^{(n-2}(0+) - f^{(n-1}(0+)$
4.	$\int_0^x f(t)\,dt$	$\frac{1}{p}\varphi(p)$
5.	$\int_a^x f(t)\,dt$	$\frac{1}{p}\varphi(p) - \frac{1}{p}\int_0^a f(x)\,dx$
6.	1	$\frac{1}{p}; \qquad p > 0$
7.	k	$\frac{k}{p}; \qquad p > 0$
8.	$\frac{\lvert x-\alpha\rvert}{x-\alpha}; \qquad \alpha > 0$	$\frac{1}{p}(2e^{-\alpha p} - 1); \qquad p > 0$
9.	$\frac{\lvert x+\alpha\rvert}{x+\alpha}; \qquad \alpha \geqslant 0$	$\frac{1}{p}; \qquad p > 0$

	$f(x)$	$\varphi(p)$
10.	$Y(x-\alpha)$ = escalón unidad de Heaviside; $(\alpha \geqslant 0)$	$\frac{1}{p}e^{-\alpha p}$; $p > 0$
11.	$\frac{1}{2}\left(\frac{\lvert x-\alpha\rvert}{x-\alpha} - \frac{\lvert x-(\alpha+h)\rvert}{x-(\alpha+h)}\right) =$ = escalonada unidad en el intervalo $(\alpha, \alpha+h)$	$\frac{1}{p}e^{-\alpha p}(1-e^{-hp})$
12.	e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$; $p > a$
13.	b^{ax}; $b > 0$	$\frac{1}{p-a\ln b}$; $p > a\ln b$
14.	Ch ax	$\frac{p}{p^2-a^2}$; $p > 0$
15.	Sh ax	$\frac{a}{p^2-a^2}$; $p > 0$
16.	cos ax	$\frac{p}{p^2+a^2}$; $p > 0$
17.	sen ax	$\frac{a}{p^2+a^2}$; $p > 0$
18.	$f(t)$, periódica de período T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt$; $p > 0$

	$f(x)$	$\varphi(p)$
19.	$\dfrac{\lvert \operatorname{sen} t \rvert}{\operatorname{sen} t}$	$\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{\pi p}-1}{e^{\pi p}+1}; \quad p>0$
20.	$e^{ax}f(x)$	$\varphi(p-a)$
21.	$e^{ax}\cos bx$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
22.	$e^{ax}\operatorname{sen} bx$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$
23.	$\dfrac{1}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx$	$\dfrac{1}{(p-a)^2+b^2}$
24.	$e^{ax}\operatorname{Ch} bx$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2-b^2}$
25.	$e^{ax}\operatorname{Sh} bx$	$\dfrac{b}{(p-a)^2-b^2}$
26.	$\dfrac{1}{b}e^{ax}\operatorname{Sh} bx$	$\dfrac{1}{(p-a)^2-b^2}$
27.	$\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{a-b}; \quad a\neq b$	$\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$
28.	$\dfrac{ae^{ax}-be^{bx}}{a-b}; \quad a\neq b$	$\dfrac{p}{(p-a)(p-b)}$

	$f(x)$	$\varphi(p)$
29.	$f(kx), \quad k > 0$	$\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{p}{k}\right)$
30.	$f(kx-r); \quad k > 0, \quad r > 0$	$\frac{1}{k}e^{-\frac{rp}{k}}\varphi\left(\frac{p}{k}\right)$
31.	$xf(x)$	$-\varphi'(p)$
32.	$x^2 f(x)$	$\varphi''(p)$
33.	$x^n f(x); \quad n = 1, 2, \ldots$	$(-1)^n \varphi^{(n}(p)$
34.	x	$\frac{1}{p^2}$
35.	x^2	$\frac{2}{p^3}$
36.	$x^n; \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
37.	$\lvert x-\alpha\rvert; \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{p^2}(2e^{-\alpha p}-1)+\frac{\alpha}{p}; \quad p > 0$
38.	$\lvert x+\alpha\rvert; \quad \alpha \geqslant 0$	$\frac{1}{p^2}+\frac{\alpha}{p}; \quad p > 0$
39.	$\frac{f(x)}{x}$	$\int_p^\infty \varphi(p)\,dp$

	$f(x)$	$\varphi(p)$
40.	$\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}$	$\operatorname{arc\,tg} \dfrac{a}{p}$
41.	$\dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$	$\ln\left\lvert\dfrac{p-b}{p-a}\right\rvert$
42.	$\dfrac{\cos ax - \cos bx}{x}$	$\ln\left\lvert\sqrt{\dfrac{p^2+a^2}{p^2+b^2}}\right\rvert$
43.	$\delta = Y'(x) =$ delta de Dirac, o derivada del escalón unidad en $x = 0$	1
44.	$\delta_a = Y'(x-a) =$ delta, o derivada del escalón unidad en $x = a$	e^{-ap}
45.	$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\lvert x-a\rvert}{x-a}\right) = 2\delta_a =$ derivada de la escalonada que salta de -1 a $+1$ en $x = a$	$2e^{-ap}$
46.	$\delta_a - \delta_{a+h} =$ derivada de la escalonada unidad en $(a, a+h)$	$e^{-ap}(1 - e^{-hp})$
47.	$\dfrac{1}{(n-1)!}e^{ax}x^{n-1}; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{1}{(p-a)^n}$
48.	$Me^{ax}\cos bx + \dfrac{Ma+N}{b}e^{ax}\operatorname{sen} bx$	$\dfrac{Mp+N}{(p-a)^2+b^2}$

	$f(x)$	$\varphi(p)$
49.	$\frac{1}{2a}x \operatorname{sen} ax$	$\frac{p}{(p^2+a^2)^2}$
50.	$\frac{1}{2a}\operatorname{sen} ax + \frac{1}{2}x\cos ax$	$\frac{p^2}{(p^2+a^2)^2}$
51.	$\frac{1}{2a^3}\operatorname{sen} ax - \frac{1}{2a^2}x\cos ax$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Sabiendo que

$$\mathcal{L}xf(3x) = \frac{2p}{(1+p^2)^2},$$

hallar $\mathcal{L}e^{2x}\frac{f(5x)}{x}$. Obtener después $f(x)$ y comprobar mediante esta función el resultado anterior.

Llamemos $\varphi(p)$ a la transformada de $f(3x)$. Entonces será:

$$\mathcal{L}xf(3x) = -\varphi'(p) = \frac{2p}{(1+p^2)^2}.$$

Integrando, tendremos:

$$\varphi(p) = \frac{1}{1+p^2} + C,$$

donde C ha de ser igual a cero para que $\varphi(p)$ sea la transformada de una función. Así, pues,

$$\varphi(p) = \mathcal{L}f(3x) = \frac{1}{1+p^2}.$$

Apliquemos la propiedad

$$\mathcal{L}g(kx) = \frac{1}{k}\psi\left(\frac{p}{k}\right), \text{ si } \psi(p) = \mathcal{L}g(x).$$

Será:

$$\mathcal{L}f(5x) = \mathcal{L}f\left(\frac{5}{3}\cdot 3x\right) = \frac{3}{5}\varphi\left(\frac{3p}{5}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3p}{5}\right)^2}.$$

La transformada de la división por x nos da:

$$\mathcal{L}\frac{f(5x)}{x} = \int_p^\infty \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3p}{5}\right)^2}dp = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{3p}.$$

Sólo nos queda la traslación:

$$\mathcal{L}e^{2x}\frac{f(5x)}{x} = \operatorname{arc\,tg}\frac{5}{3(p-2)}.$$

Comprobación:

Habíamos obtenido

$$\mathcal{L}f(3x) = \varphi(p) = \frac{1}{1+p^2}.$$

La transformada inversa de $\frac{1}{1+p^2}$ es $\operatorname{sen} x$; es decir,

$$f(3x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{3}.$$

Luego $f(5x) = \operatorname{sen} 5x/3$. Entonces será:

$$\mathcal{L}f(5x) = \frac{\frac{5}{3}}{p^2+\frac{25}{9}} = \frac{\frac{3}{5}}{1+\left(\frac{3}{5}p\right)^2},$$

que es lo que obtuvimos antes, y nos conduce al mismo resultado.

2. Hallar $\mathcal{L}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

Es

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x;$$

luego

$$\mathcal{L}\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{2p} - \frac{1}{4}\frac{2p}{p^2+4}.$$

La transformada de la división por x será:

$$\mathcal{L}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \frac{1}{4}\left(2\int_p^\infty \frac{dp}{p} - \int_p^\infty \frac{2p}{p^2+4}dp\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln p^2 - \ln(p^2+4)\Big]_p^\infty = \frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2+4}\Big|_p^\infty = \ln\left|\sqrt[4]{1+\left(\frac{2}{p}\right)^2}\right|.$$

3. Hallar la transformada inversa de $\ln\left|1+\frac{1}{p}\right|$, y comprobar el resultado.

Cuando la transformada de una función $f(x)$ es de la forma $\varphi(p) = \ln\psi(p)$, ocurre que

$$\mathcal{L}xf(x) = -\varphi'(p) = -\frac{\psi'(p)}{\psi(p)},$$

donde desaparece el logaritmo. Tomando transformadas inversas, será:

$$xf(x) = -\mathcal{L}^{-1}\frac{\psi'(p)}{\psi(p)}.$$

Si esta última se halla fácilmente, tendremos ya $f(x)$. En nuestro caso es

$$\mathcal{L}f(x) = \varphi(p) = \ln\left|1+\frac{1}{p}\right|.$$

Derivando, será:

$$\varphi'(p) = \frac{-\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p}} = -\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{(p+1)} - \frac{1}{p}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}xf(x) = -\varphi'(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Tomando transformadas inversas, tendremos:

$$xf(x) = \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p} - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p+1} = 1 - e^{-x},$$

de donde

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Comprobación:

$$\mathcal{L}f(x) = \mathcal{L}\frac{1-e^{-x}}{x} = \int_p^\infty \left(\mathcal{L}(1-e^{-x})\right)dp =$$

$$= \int_p^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) dp = \Big[\ln |p| - \ln |p+1| \Big]_p^\infty =$$

$$= \left[\ln \left| \frac{p}{p+1} \right| \right]_p^\infty = \ln \left| \frac{p+1}{p} \right| .$$

4. Hallar la curva integral de la ecuación $x^2y'' - 6y = 0$ que cumple las condiciones $y(0) = y'(0) = 0$. Utilícese la transformación de Laplace y compruébese si es única la curva integral que satisface las condiciones impuestas.

Se trata de una ecuación de Euler, y las condiciones iniciales están dadas precisamente en un punto donde no puede asegurarse la unicidad de la solución, cosa que se advierte dividiendo la ecuación por x^2 para ponerla en forma ordinaria.

Llamemos $\mathcal{L}y = \varphi(p)$, y apliquemos a la ecuación la transformación de Laplace. Tendremos:

$$\mathcal{L}x^2y'' - 6\mathcal{L}y = 0$$

Pero $\mathcal{L}x^2y'' = \dfrac{d^2}{dp^2}(\mathcal{L}y'')$. Como $\mathcal{L}y'' = p^2\varphi(p) - py(0+) - y'(0+) = p^2\varphi(p)$, suponiendo continua la solución en $x = 0$, será:

$$\mathcal{L}x^2y'' = \frac{d^2(p^2\varphi(p))}{dp^2} = p^2\varphi'' + 4p\varphi' + 2\varphi.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}x^2y'' - 6\mathcal{L}y = p^2\varphi'' + 4p\varphi' - 4\varphi = 0.$$

Es una ecuación en φ, también de Euler, y se verifica (con $p = e^t$):

$$p^2\varphi'' = D(D-1)\varphi(t); \qquad 4p\varphi' = 4D\varphi(t).$$

Nos queda la ecuación de coeficientes constantes $\varphi'' + 3\varphi' - 4\varphi = 0$. Las raíces del polinomio característico son $r_1 = 1$ y $r_2 = -4$. La solución general será:

$$\varphi(t) = c_1e^t + c_2e^{-4t}.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(p) = c_1p + c_2p^{-4}.$$

Para que $\varphi(p)$ tienda a cero cuando $p \longrightarrow \infty$, ha de ser $c_1 = 0$, y nos queda: $\varphi(p) = \dfrac{C}{p^4}$. Recordando $\mathcal{L}x^n = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$, tendremos:

$$\mathcal{L}^{-1}\varphi(p) = \frac{C}{6}\,\mathcal{L}^{-1}\,\frac{3!}{p^4} = kx^3 = y(x).$$

Esta solución satisface a la ecuación dada y a las condiciones iniciales. Así, pues, la curva integral no es única; es la familia de parábolas cúbicas $y = kx^3$.

5. En la ecuación diferencial $9(y' + y) = g(x)$ se sabe que hay una solución particular y_k tal que

$$\mathcal{L}e^x y_k = \frac{1}{p^3 - 6p^2 + 9p}.$$

Hallar $g(x)$.

El dato del problema es:

$$\mathcal{L}e^x y_k = \frac{1}{p^3 - 6p^2 + 9p} = \frac{1}{p(p-3)^2}.$$

Si deshacemos la traslación producida en la transformada por el factor e^x; es decir, si ponemos $p + 1$ en vez de p, tendremos:

$$\mathcal{L}y_k = \frac{1}{(p+1)(p-2)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-2} + \frac{3}{(p-2)^2}\right).$$

Tomando transformadas inversas, queda:

$$y_k = \frac{1}{9}(e^{-x} - e^{2x} + 3x e^{2x}).$$

La derivada de y_k es

$$y'_k = \frac{1}{9}(-e^{-x} + e^{2x} + 6x e^{2x}).$$

Luego

$$g(x) = 9(y'_k + y_k) = 9x e^{2x}.$$

6. Dada la ecuación diferencial

$$xy'' + 2y' + xy = \operatorname{sen} x,$$

obtener la solución particular que cumple la condición $y(0+) = 0$, utilizando la transformación de Laplace.

Nótese que sólo se da una condición, y no dos, y que esa condición se da en forma de límite.

Llamemos $\mathcal{L}y = \varphi(p)$ y tomemos transformadas en la ecuación. Será:

$$\mathcal{L}xy'' + 2\mathcal{L}y' + \mathcal{L}xy = \frac{1}{p^2+1}.$$

Pero

$$\mathcal{L}xy'' = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}y'');$$

es decir:

$$\mathcal{L}xy'' = -\frac{d}{dp}\left(p^2\varphi(p) - py(0+) - y'(0+)\right) = -\frac{d}{dp}(p^2\varphi - y'(0+)) = -2p\varphi - p^2\varphi'.$$

También sabemos que

$$\mathcal{L}y' = p\mathcal{L}y - y(0+).$$

Análogamente, $\mathcal{L}xy = -\varphi'(p)$. Sustituyendo todo esto en la ecuación transformada nos queda, después de simplificar:

$$\varphi'(p) = -\frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Para hallar $\varphi(p)$ podemos integrar y discutir después el valor de la constante. Pero es más breve hacerlo así: Tomando transformadas inversas en la identidad $\mathcal{L}xy = -\varphi'(p)$, tenemos $xy = -\mathcal{L}^{-1}\varphi'$. O sea,

$$y = \frac{\mathcal{L}^{-1}\dfrac{1}{(p^2+1)^2}}{x}.$$

Y utilizando el número 51 de la tabla de transformadas, resulta:

$$y = \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{2x}.$$

7. Hallar la transformada de la función periódica $f(t) = |\operatorname{sen} t|$.

La función es el seno rectificado, y su período mínimo es $T = \pi$. Para hallar su transformada de Laplace podemos aplicar directamente la fórmula obtenida en 7.3, que era

$$\mathcal{L}f(t) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)\,dt.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}|\operatorname{sen} t| = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}|\operatorname{sen} t|\,dt = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\frac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t}\operatorname{sen} t\,dt.$$

La fracción $\dfrac{|\operatorname{sen} t|}{\operatorname{sen} t}$ vale 1 en $(0,\pi)$, y sus límites en los extremos desde el interior son también iguales a 1. Así, pues:

$$\mathcal{L}|\operatorname{sen} t| = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\operatorname{sen} t\,dt.$$

Recordando que

$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C,$$

tenemos:

$$\mathcal{L}|\operatorname{sen} t| = \frac{1}{(p^2+1)(e^{-\pi p}-1)}\Big|e^{-pt}(p\operatorname{sen} t + \cos t)\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{(e^{-\pi p}-1)(p^2+1)}(-e^{-\pi p}-1) = \frac{1}{p^2+1}\frac{e^{\pi p}+1}{e^{\pi p}-1}.$$

8. Hallar la transformada de la poligonal

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(|x+1| + |x-1|\right)$$

y las de sus dos primeras derivadas.

La transformada de $f(x)$ se obtiene directamente de su expresión, pues sabemos cuáles son las transformadas de $|x \pm \alpha|$, $\alpha \geqslant 0$, obtenidas en 8.3 y tabuladas con los números 37 y 38. Será:

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}(2e^{-p} - 1) + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{pe^p} + 1\right).$$

También se ha podido hallar sabiendo que $f(x)$ vale la unidad en $(0, 1)$ y es igual a x en $(1, +\infty)$, como se deduce fácilmente de la expresión de la poligonal.

Si derivamos $f(x)$, resulta

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x+1|}{x+1} + \frac{|x-1|}{x-1}\right),$$

cuya transformada se puede obtener directamente del segundo miembro, pues conocemos las transformadas de $\dfrac{|x \pm \alpha|}{x \pm \alpha}$, $\alpha \geqslant 0$, que fueron halladas en 7.1 y tabuladas en los números 8 y 9. Tenemos:

$$\mathcal{L}f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p}(2e^{-p} - 1)\right) = \frac{1}{pe^p}.$$

También hemos podido obtenerla aplicando la propiedad

$$\mathcal{L}f'(x) = p\mathcal{L}f(x) - f'(0) = \frac{1}{pe^p} + 1 - 1 = \frac{1}{pe^p}.$$

También, en fin, podemos hallar $\mathcal{L}f'(x)$ viendo que $f'(x)$ es una escalonada que vale cero en $(0, 1)$ y 1 en $(1, +\infty)$, como se desprende de su expresión (y, por supuesto, de los lados de la poligonal en el semiplano derecho de $x = 0$).

Si volvemos a derivar, hemos de tener en cuenta los saltos de $f'(x)$. La derivada de una escalonada en el sentido de las distribuciones contiene en las discontinuidades las deltas de Dirac. La derivada segunda es, en nuestro caso, $f''(x) = \delta_{-1} + \delta_{+1}$. Para la transformación de Laplace, sólo cuentan las deltas en $(0, +\infty)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{L}f''(x) = e^{-p}.$$

También hemos podido emplear la propiedad

$$\mathcal{L}f''(x) = p^2\mathcal{L}f(x) - p\psi(0+) - f'(0+),$$

que conduce al mismo resultado.

9. Hallar la función cuya transformada de Laplace es

$$\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+1)^2}.$$

Descomponemos la primera fracción en suma de fracciones simples, y nos queda:

$$\frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Las transformadas inversas de estas fracciones son bien familiares. En cuanto al sustraendo que figura en el enunciado, su transformada inversa se obtiene del número 51 de la tabla; o bien, calculándola por medio de la convolución. Por lo tanto, la función pedida es:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + \cos x - x\cos x).$$

10. Hallar las funciones $y(x)$, $z(x)$ que satisfacen al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y' - z = e^x \\ y + z' = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

y cumplen las condiciones $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

Apliquemos la transformación de Laplace a las ecuaciones del sistema. Será:

$$\begin{cases} \mathcal{L}y' - \mathcal{L}z = \mathcal{L}e^x \\ \mathcal{L}y + \mathcal{L}z' = \mathcal{L}\operatorname{sen} x. \end{cases}$$

Utilizando la propiedad $\mathcal{L}y' = p\mathcal{L}y - y(0)$, y la análoga para z', nos queda:

$$\begin{cases} p\mathcal{L}y - \mathcal{L}z = \dfrac{p}{p-1} \\ \mathcal{L}y + p\mathcal{L}z = \dfrac{1}{p^2+1}, \end{cases}$$

que es un sistema lineal en las transformadas de y y de z, con solución única. Resuelto por la regla de Cramer, nos da:

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{(p^2+1)^2} + \frac{p^2}{(p-1)(p^2+1)},$$

$$\mathcal{L}z = \frac{p}{(p^2+1)^2} - \frac{p}{(p-1)(p^2+1)}.$$

Descomponiendo en suma de fracciones simples las que tienen por denominador $(p-1)(p^2+1)$, nos queda:

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + 2\frac{1}{(p^2+1)^2}\right),$$

$$\mathcal{L}z = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{p-1} + \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} + 2\frac{p}{(p^2+1)^2}\right).$$

Las transformadas inversas de estas fracciones son inmediatas o figuran en las tablas con los números 49 y 51. Por lo tanto:

$$y = \frac{1}{2}(e^x + \cos x + 2\operatorname{sen} x - x\cos x),$$

$$z = \frac{1}{2}(-e^x + \cos x - \operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x).$$

Es necesario comprobar si estos resultados obtenidos por el método de Laplace satisfacen a las ecuaciones del sistema y si, además, cumplen las condiciones iniciales. Fácilmente se comprueba que, efectivamente, es así.

PROPUESTOS

1. Si existe la transformada de Laplace de una función $f(x)$, razónese por qué es cierta la igualdad

$$\mathcal{L}f(|x|) = \mathcal{L}f(x),$$

y por qué no es cierta, en general, esta otra:

$$\mathcal{L}|f(x)| = \mathcal{L}f(x).$$

Póngase un ejemplo de función en la que se cumpla la última igualdad.

2. Sabiendo que es

$$\mathcal{L}xf(x) = \frac{2p}{(p^2+1)^2},$$

calcular

$$\mathcal{L}e^{ax}\frac{f(x)}{x}.$$

3. Hallar la solución particular de la ecuación $y'' + y = xe^x$ que satisface las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. Hallar la transformada inversa de

$$\frac{5p}{p^3 - p^2 + 4p - 4}.$$

5. Sabiendo que

$$\mathcal{L}e^x f(x) = \frac{1}{p^2 - 2p + 2},$$

hallar $\mathcal{L}e^{3x}\dfrac{f(x)}{x}$ y $\mathcal{L}xf(x)$; y también $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$.

6. Hallar una solución de la ecuación integral

$$xy + \int_0^x y\,dx = h(x),$$

sabiendo que

$$\mathcal{L}h(x) = \frac{1-2p}{p(p-1)^2}.$$

NOTA: Es una ecuación de Volterra cuya ecuación diferencial es inmediata derivando, previa la obtención de la transformada inversa de $h(x)$. Pero se trata de aplicar directamente la transformación de Laplace.

7. En la ecuación

$$y' + y = xf(x)$$

hay una solución particular

$$u(x) = e^{-x}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{p^3 - 6p^2 + 9p}.$$

Hallar $f(x)$.

8. Hallar $\mathcal{L}^{-1} \ln \dfrac{2p-1}{2p+1}$.

9. Hallar la transformada de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{para} \quad 2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi \\ 0 & \text{para} \quad (2n+1)\pi \leqslant x \leqslant (2n+2)\pi \end{cases}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

10. Hallar dos funciones que satisfagan al sistema

$$\begin{cases} x' + y = 0 \\ x'' + y' + y = e^t \end{cases}$$

y cumplan las condiciones

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = y(0) = 0.$$

Interprétese el resultado.

BIBLIOGRAFIA

HILDEBRAND, F. B.: *Métodos de cálculo para ingenieros.* Aguilar. Madrid, 1960.

MURRAY-SPIEGEL: *Laplace Transforms.* Schaum's Outline Series.

SCHWARTZ, Laurent: *Métodos matemáticos para las ciencias físicas.* Selecciones Científicas. Madrid, 1969.

WEINBERGER, Hans F.: *Curso de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.* Ed. Reverté. Barcelona-Buenos Aires-México, 1970.

CAPITULO 4

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

1. DEFINICIONES

Desde un punto de vista puramente matemático puede plantearse el problema de encontrar una función $u(x_1, x_2, ..., x_m)$ de varias variables reales independientes cuando conocemos una relación donde figura, al menos, una derivada parcial de cualquier orden de dicha función u. Por ejemplo, puede tratarse de hallar una función $u(x, y)$ sabiendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y.$$

Este ejemplo es trivial, y es claro que toda función de la forma

$$u = x^2 + xy + f(y),$$

donde $f(y)$ es una función arbitraria, satisface a la relación dada.

Estas relaciones expresadas por una igualdad en la cual figuran una o varias derivadas parciales de cualquier orden de una función desconocida con más de una variable independiente son las que llamamos *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* o, más brevemente, ecuaciones en derivadas parciales, o simplemente ecuaciones en derivadas.

En estas ecuaciones puede figurar también la misma función desconocida $u(x_1, x_2, ..., x_m)$, y asimismo otras funciones conocidas de las variables independientes.

Con un simbolismo amplio, una ecuación en derivadas parciales puede ser expresada así:

$$\varphi\left(x_1, x_2, ..., x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...\right) = 0.$$

He aquí, por ejemplo, algunas ecuaciones en derivadas:

a) $3xz\dfrac{\partial z}{\partial x} - (x + y)\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz^2$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - uz\dfrac{\partial u}{\partial z} + (y - 3u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u - xz$

c) $(3x + y)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - x\dfrac{\partial z}{\partial y} + z\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y$

d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

En a), la función desconocida es z, puesto que aparecen derivadas parciales de ella. Las variables independientes son x, y. La función desconocida del ejemplo b) es u, con las tres variables independendientes x, y, z. En los ejemplos c) y d) la función desconocida es z de dos variables independientes x, y.

Llamamos *orden* de una ecuación en derivadas parciales al que tiene la derivada de mayor orden que figura en la ecuación. En los ejemplos anteriores, la ecuación a) es de primer orden. Las demás son de segundo.

Una ecuación en derivadas parciales es *lineal* cuando es lineal en la función desconocida y en sus derivadas, y además no hay productos entre las derivadas ni entre ellas y la función. En los ejemplos puestos, sólo es lineal la ecuación d), que es la conocida ecuación de Laplace. Las demás no son lineales, porque en a) aparecen z^2 y el producto $z\dfrac{\partial z}{\partial x}$; en b) figuran los productos $u\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$; y en c) hay una derivada al cuadrado, y además aparece el producto $z\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

La forma general de una ecuación lineal de primer orden con una función z de dos variables independientes x, y es la siguiente:

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = z\,R_1(x,y) + R_2(x,y), \qquad (1a)$$

donde P, Q, R_1, R_2 son funciones de clase 1 y P y Q no se anulan simultáneamente.

Dada una ecuación en derivadas de orden n lineal o no lineal, con una función desconocida de m variables independientes, decimos que una *solución particular* de dicha ecuación es toda función $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ continua, con derivadas parciales continuas hasta las de orden n inclusive, que satisface a la ecuación en un conjunto abierto, conexo y no vacío (dominio) del espacio euclídeo E_m. Las soluciones particulares en forma explícita son *integrales particulares explícitas* o *variedades integrales de la ecuación.*

Por ejemplo, dada la ecuación:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos y - \frac{\partial z}{\partial y} + \cos^2 y + x \operatorname{sen} y = 0,$$

la función $z = (x + \operatorname{sen} y)^2 - x\cos y - 1$ es una solución particular de tal ecuación, como se comprueba

sin dificultad obteniendo las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y sustituyéndolas en la ecuación dada, con lo cual el primer miembro resulta ser idénticamente nulo. Ahora bien, toda expresión de la forma:

$$z = f(x + \operatorname{sen} y) - x \cos y$$

satisface también a la ecuación dada, *cualquiera que sea la función f*, derivable hasta el orden de la ecuación. Veámoslo: hallaremos

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$$

teniendo en cuenta que $x + \operatorname{sen} y$ es una variable intermedia u. Tendremos pues:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial x} - \cos y = f' - \cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{df}{du}\frac{\partial u}{\partial y} + x \operatorname{sen} y = f' \cos y + x \operatorname{sen} y.$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ecuación dada, nos queda:

$$(f' - \cos y)\cos y - f' \cos y - x \operatorname{sen} y + \cos^2 y + x \operatorname{sen} y =$$
$$= f' \cos y - \cos^2 y - f' \cos y - x \operatorname{sen} y + \cos^2 y + x \operatorname{sen} y = 0.$$

Así, pues, $z = f(x + \operatorname{sen} y) - x \operatorname{sen} y$ es un conjunto de soluciones particulares de la ecuación. Cada una de ellas se obtiene concretando o definiendo la función f. Por ejemplo, son soluciones particulares las siguientes:

$$z = 2(x + \operatorname{sen} y)^2 - x \cos y;$$
$$z = \sqrt{x + \operatorname{sen} y} - x \cos y + 1;$$
$$z = \ln|x + \operatorname{sen} y| - x \cos y + 3; \text{ etc.}$$

En este caso se demuestra, además, que *todas* las soluciones particulares de la ecuación se deducen, precisamente, de la función arbitraria f.

En las ecuaciones diferenciales *ordinarias* de orden n, la solución general contiene n constantes arbitrarias. Dando valores a estas constantes se obtiene las soluciones particulares (en las ecuaciones no lienales pueden existir soluciones *singulares* que no se deducen dando valores a las constantes de la solución general). En cambio, cuando se trata de ecuaciones en derivadas parciales la solución general contiene funciones arbitrarias.

2. OBTENCION DE UNA ECUACION EN DERIVADAS PARCIALES POR ELIMINACION DE FUNCIONES ARBITRARIAS

Hemos dicho que la solución general de una ecuación en derivadas parciales contiene funciones arbitrarias. Si nos dan una expresión con una o varias funciones arbitrarias y nos dicen que dicha expresión es la solución general de una ecuación de derivadas

parciales, nos pueden pedir que determinemos la mencionada ecuación. Esto se puede lograr obteniendo un número suficiente de derivadas parciales de la solución general que nos permita eliminar las funciones arbitrarias, o las derivadas de ellas que vayan apareciendo.

Veamos algunos ejemplos:

1. Determinar la ecuación en derivadas parciales cuya solución general es $z = (x+y)f(y^2 - x^2) + 1$.

Hay una función arbitraria f. Hallemos $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, teniendo en cuenta que $f(y^2 - x^2) = f(u)$ es una función compuesta. Será:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(u) - 2x(x+y)f'(u);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(u) + 2y(x+y)f'(u)$$

Aparecen aquí dos funciones arbitrarias $f(u), f'(u)$, que debemos eliminar. Pero disponemos de tres relaciones: la solución general z y sus dos derivadas primeras. Es decir, disponemos del sistema:

$$\begin{cases} z = (x+y)f + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial x} = f - 2x(x+y)f' \\ \frac{\partial z}{\partial y} = f + 2y(x+y)f'. \end{cases}$$

Multiplicando la segunda identidad por y, la tercera por x y sumando, eliminamos f' quedándonos el nuevo sistema:

$$\begin{cases} z = (x+y)f + 1 \\ y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = (x+y)f \end{cases}$$

de donde, eliminando f, resulta:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial x}{\partial y} = z - 1.$$

2. La solución general de una ecuación en derivadas parciales es

$$z = f(3x - y) + g(x + 5y) - xy.$$

Determinar la ecuación.

En la solución general dada hay dos funciones arbitrarias. Teniendo en cuenta que

$$f(3x - y) = f(u),\ g(x + 5y) = g(v)$$

son funciones compuestas de x y de y a través de las variables u y v respectivamente, hallemos las derivadas parciales sucesivas de z en número tal que sea posible eliminar las funciones arbitrarias que vayan apareciendo. Las derivadas primeras son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3f' + g' - y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -f' + 5g' - x.$$

Aquí tenemos dos igualdades con las funciones f' y g'. Sigamos derivando, teniendo en cuenta que ahora f' y g' son funciones compuestas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9f'' + g'';$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3f'' + 5g'' - 1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'' + 25g''.$$

Disponemos de tres igualdades en las que figuran dos funciones arbitrarias f'', g'', cuya eliminación es inmediata, obteniéndose la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 14\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 14 = 0.$$

En la solución general de una ecuación en derivadas no siempre aparecen las funciones arbitrarias dispuestas tan fácilmente como en los ejemplos anteriores, siendo su eliminación mucho más laboriosa, caso de ser posible. Por otra parte, en los mencionados ejemplos la solución general ha sido dada en forma explícita, cuando lo más frecuente (en el primer ejemplo) es que sea de la forma $u_1(x, y, z) = f(u_2(x, y, z))$, donde u_1 y u_2 son funciones determinadas y f arbitraria, *no siendo posible, en general, despejar* z.

3. REPASO DE ALGUNAS NOCIONES DE ANALISIS VECTORIAL

Vamos a necesitar de algunas consideraciones geométricas para estudiar las ecuaciones lineales y casi lineales de primer orden en derivadas parciales limitadas, en principio, a las ecuaciones que contienen una función desconocida z de dos variables independientes.

Sólo repasaremos, a continuación, las nociones imprescindibles.

3.1. El vector de posición.

Consideremos el espacio euclídeo ortogonal $(0; x, y, z)$ y el conjunto V de todos los vectores libres del espacio. Dos vectores son *equipolentes* cuando tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. La equipolencia es una relación de equivalencia que divide a V en *clases*. Una clase está constituida por todos los vectores equipolentes a uno dado. Entre los vectores de una clase figura el que tiene como

punto de aplicación el origen 0 de coordenadas. Elijamos como representantes de clase los vectores de origen 0. Los llamaremos *vectores centrales*. Cuando el afijo de un vector central describe una curva, o una superficie, el vector central recibe el nombre de *vector de posición*.

En el conjunto W de los vectores centrales (determinados por las coordenadas de su afijo) puede definirse la igualdad, la suma y el producto por un escalar, resultando de ello que W es un *espacio vectorial* de dimensión 3. Podemos elegir en W la base constituida por los tres vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de origen 0 situados sobre los ejes x, y, z respectivamente y orientados lo mismo que ellos. Todo vector $\vec{r} \in W$ es una combinación lineal de los vectores de esta base. Los coeficientes que multiplican a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (componentes escalares) son, precisamente, las coordenadas x, y, z del afijo de $\vec{r}$. Es decir:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

3.2. Vector unitario tangente a una curva.

Supongamos que afijo de un vector $\vec{r} \in W$ describe una curva regular C del espacio (figura). Como hemos dicho antes, $\vec{r}$ será un vector de posición, y dependerá de *una* variable t (que puede ser el tiempo), puesto que $\vec{r}$ traza *una* variedad de *una* dimensión.

En un instante genérico t, el vector $\vec{r}$ "está trazando" el punto A de la curva; es decir, $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$. Al cabo de un incremento de tiempo Δt, el vector $\vec{r}(t)$ habrá llegado a $\overrightarrow{OB}$, después de que su afijo ha descrito el arco Δs de C. Si al vector $\overrightarrow{OA}$ le hemos llamado $\vec{r}$, es claro que $\overrightarrow{OB}$ será $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, con lo cual $\Delta\vec{r}$ es el "vector cuerda" $\overrightarrow{AB}$ que no es, en general, un vector central, si bien pertenece a una clase cuyo representante es su equipolente de origen O. Si las coordenadas de A son x, y, z, es:

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = (x + \Delta x)\vec{i} + (y + \Delta y)\vec{j} + (z + \Delta z)\vec{k};$$

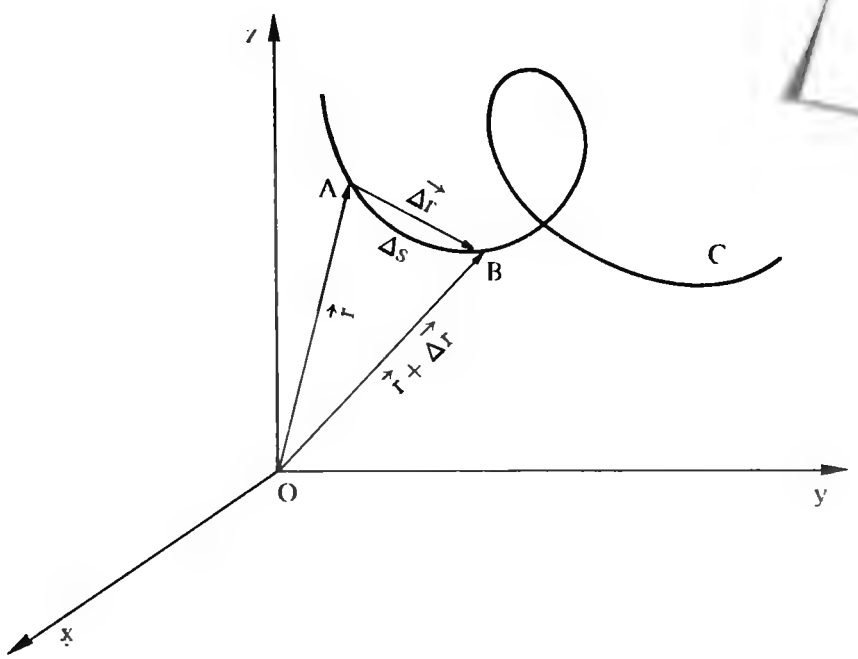
de donde

$$\Delta\vec{r} = \vec{i}\,\Delta x + \vec{j}\,\Delta y + \vec{k}\,\Delta z$$

Dividiendo los dos miembros de esta última igualdad por Δs, tenemos el vector:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{\Delta x}{\Delta s}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta s}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta s}\vec{k}.$$

Cuando el escalar Δs tiende a cero, la longitud o módulo del vector cuerda $|\Delta\vec{r}|$ tiende a confundirse con la longitud del arco; o sea:



$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$$

Al mismo tiempo, los cocientes incrementales $\frac{\Delta x}{\Delta s}$, $\frac{\Delta y}{\Delta s}$, $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ tienden a las correspondientes derivadas, y las posiciones de los vectores cuerda tienden a la del vector tangente en A a la curva C. Tenemos, pues:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}.$$

Este es el *vector unitario* tangente a una curva. Por ser unitario, sus componentes escalares son los cosenos directores de la recta tangente en A a la curva C; es decir:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha = l, \qquad \frac{dy}{ds} = \cos\beta = m, \qquad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma = n.$$

Sabemos también que se verifica $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

El vector unitario tangente a una curva es, pues, la derivada del vector de posición respecto del arco.

3.3. Función gradiente.

Una función vectorial $\overrightarrow{F}$ de tres variables es de la forma:

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k},$$

donde P, Q, R son funciones escalares, que supondremos diferenciables y unívocas. A cada terna de valores arbitrarios (x,y,z) le corresponde un punto A del espacio (en el dominio de $\overrightarrow{F}$) y un vector de origen A.

Si las componentes escalares P, Q, R de $\overrightarrow{F}$ son, precisamente, las tres derivadas parciales primeras de una cierta función escalar $\psi(x,y,z)$; es decir, si:

$$P = \frac{\partial\psi}{\partial x}; \qquad Q = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad R = \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

la función vectorial se llama *función gradiente* de ψ:

$$\overrightarrow{G}(x,y,z) = \frac{\partial\psi}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\overrightarrow{k}.$$

A cada terna de valores (x,y,z) le corresponde, como antes, un punto A del espacio y un vector de origen A. Estos vectores particularizados son los gradientes de la función $\psi(x,y,z)$ en cada punto. Al conjunto de todos ellos se le llama *campo de gradientes* de ψ. La función $\psi(x,y,z)$ recibe el nombre de *potencial* del campo.

Vemos, pues, que una función gradiente es una función vectorial; pero no toda función vectorial es una función gradiente. El gradiente de ψ suele escribirse $\operatorname{grad}\psi$.

Se comprueba que la componente escalar de un vector gradiente en una dirección cualquiera $s(l,m,n)$ es la derivada del potencial $\psi(x,y,z)$ en esa dirección. De aquí se obtiene dos consecuencias importantes:

1ª) En cada punto, el potencial ψ varía con la máxima rapidez en la dirección de su gradiente; es decir, si s es la dirección del gradiente en un punto, el módulo de la derivada $d\psi/ds$ es máximo. Dicho en el argot de los físicos: la "caida de potencial" es máxima en la dirección del gradiente.

2ª) Si $\psi(x,y,z)$ es el potencial de un campo de gradientes, e igualamos ψ a una constante arbitraria c, tenemos un haz de superficies $\psi(x,y,z) = c$ sin puntos propios comunes. A cada valor que demos a c le corresponde una superficie de dicho haz. Estas superficies se llaman *equipotenciales*, puesto que el potencial ψ es el mismo para cada valor de c. Pues bien: el gradiente de ψ en un punto A es un vector *normal* a la superficie del haz $\psi = c$ que pasa por A. O sea, los gradientes son normales a las superficies equipotenciales en cada punto de ellas. Por lo tanto, el gradiente en A es perpendicular al plano tangente en A a la superficie equipotencial $\psi = c_A$ que pasa por el referido punto.

En el análisis vectorial se utiliza profusamente el operador de Hamilton, llamado *nabla*, cuyo símbolo es ∇. Se trata de un operador diferencial vectorial cuyas componentes escalares son las derivadas primeras "vacías" respecto de x, y, z; es decir,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Si a la derecha de ∇ escribimos una función escalar $\psi(x, y, z)$ derivable, el operador actúa sobre dicha función, que queda "succionada" por las derivadas vacías. El significado de este operador es, pues:

$$\nabla\psi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{k}.$$

El último miembro es el gradiente de ψ. Podemos, por lo tanto, utilizar la notación $\nabla\psi$ para expresar "gradiente de ψ".

4. ECUACION CASI LINEAL DE PRIMER ORDEN EN DERIVADAS PARCIALES

Vamos a considerar en principio las ecuaciones que contienen una función desconocida z de dos variables x, y. En este supuesto, llamamos ecuación *casi lineal de primer orden* en derivadas parciales a la que tiene la forma:

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{1}$$

donde P, Q, R van a ser funciones continuas, con derivadas parciales continuas en un dominio $D \subset E_3$ siendo además $|P| + |Q| \neq 0$. Se llama "casi lineal" porque es lineal en las derivadas parciales; pero ya se comprende que puede no ser totalmente lineal.

Toda solución particular $z = f(x, y)$, o bien $F(x, y, z) = 0$, de la ecuación anterior es una *superficie integral* de (1).

Con los mismos coeficientes de (1), P, Q, R, construyamos ahora la ecuación:

$$P(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

cuya función desconocida u lo es de las tres variables x, y, z. Cualquier solución particular de (2), bien en forma implícita, bien en forma explícita, es una variedad integral de dicha ecuación.

Es conveniente ahora dejar bien sentados los cuatro asertos siguientes:

a) *Si $F(x, y, z) = 0$ es una superficie integral de* (1), *la función $v = F(x, y, z)$ es solución de (2).*

Derivemos $F(x,y,z)=0$ respecto de x y respecto de y, teniendo en cuenta que z es función (implícita) de x e y:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{3}$$

de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Suponemos que $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ no es idénticamente nula. Estas derivadas, sustituidas en (1), harán que el primer miembro sea idéntico a $R(x,y,z)$, por haber supuesto que $F=0$ es una superficie integral de (1).

Nos queda:

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}+R\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

lo cual expresa que $F(x,y,z)=v$ es solución de (2).

b) *Si* $v=F(x,y,z)$ *es una solución de* (2) *(variedad integral de* (2)*), la función implícita* z *dada por* $F(x,y,z)=0$ *es solución de* (1).

Puesto que $F(x,y,z)$ satisface a (2), será:

$$P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial y}+R\frac{\partial F}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Dividiendo por $\dfrac{\partial F}{\partial z}$, supuesta no idénticamente nula, podemos escribir así la identidad anterior:

$$P\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right)+Q\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right)=R.$$

Pero los cocientes indicados negativos son, precisamente, las derivadas parciales primeras de z obtenidas al derivar $F(x,y,z)=0$ respecto de x y respecto de y. La identidad queda, pues, así:

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R,$$

donde z es, por lo tanto, la función implícita dada por $F(x,y,z) = 0$. Luego esta función z satisface a (1).

c) *Si* $F(x,y,z) = 0$ *es una superficie integral de* (1),*también lo son todas las superficies del haz* $F(x,y,z) = c$, *donde* c *es una constante arbitraria*

Esto es inmediato, puesto que las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ deducidas tanto de $F(x,y,z) = c$ como de $F(x,y,z) = 0$ son las mismas.

Por la misma razón,*si* $F(x,y,z) = c$ *es un haz integral de* (1),*la función* $v = F$ *es solución de* (2).

d) *Si* $v = F(x,y,z)$ *es una hipersuperficie integral de* (2)*las funciones implícitas* z *dadas por* $F(x,y,z) = c$, *para cada valor de* c, *son superficies integrales de* (1).

Ya que al derivar $F = c$ respecto de x y respecto de y se obtienen las mismas expresiones de $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ que al derivar $F = 0$, llegándose a

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

cualquiera que sea c.

En lo que sigue diremos que una solución particular genérica de la ecuación (2) es $u(x,y,z)$, en vez de emplear la letra F.

* * *

El primer miembro de la ecuación (2) puede escribirse como producto escalar de dos funciones vectoriales, del siguiente modo:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\right).$$

El primer factor es una función vectorial $\vec{w}$ de componentes P, Q, R que origina vectores particulares para cada terna de valores (x,y,z); es decir, para cada punto del espacio perteneciente a la intersección de los campos de existencia de las funciones P, Q, R. El segundo factor es la función gradiente de u, y origina vectores gradientes para cada terna de valores (x,y,z). Cada vector gradiente en un punto A es normal a la superficie del haz $u = c$ que pasa por A (recuérdese el apartado 3.3). La ecuación (2) es, pues:

$$\vec{w} \cdot \operatorname{grad} u = 0. \tag{2'}$$

Consideremos un punto A del espacio en el cual estén definidas las funciones vectoriales $\vec{w}$ y $\operatorname{grad} u$. Dicho punto es el origen de dos vectores numéricos: uno es el

vector de componentes (numéricas ya) P, Q, R; el otro es el gradiente de la función escalar $u(x,y,z)$ en el punto A. Como este gradiente es normal a la superficie $u = c_A$ que pasa por A, y como el producto escalar $\overline{w} \cdot \text{grad}\, u$ es nulo (ecuación (2')), el vector $\overline{w}$ de componentes P, Q, R en A será perpendicular al vector gradiente de u en A y, por lo tanto, $\overline{w}$ ha de estar contenido en el plano tangente en A a la superficie $u = c_A$.

Recíprocamente, si el vector $\overline{w}$ de componentes P, Q, R en A está contenido en el plano tangente a la superficie $u(x,y,z) = c_A$ en dicho punto, el producto escalar $\overline{w} \cdot \text{grad}\, u$ es idénticamente nulo, pues $\text{grad}\, u$ es perpendicular al plano tangente en A a la superficie $u = c_A$ y, por lo tanto, perpendicular a $\overline{w}$.

Como, por otra parte, la función $u(x,y,z)$ es una solución particular de (2), se sigue que $u = c$ es un haz de superficies integrales de (1) (recuérdese el apartado *d)* del párrafo 4). Y también si $u = 0$ es una superficie integral de (1), la función u es solución de (2) (apartado *a)* del párrafo 4).

Por lo tanto:*una condición necesaria y suficiente para que* $u(x,y,z) = 0$ *sea una superficie integral de la ecuación*

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z)$$

es que los vectores de componentes P, Q, R *en cada punto de* $u = 0$ *estén contenidos en los respectivos planos tangentes a dicha superficie.*

4.1. Curvas características.

Se la ecuación:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \tag{1}$$

donde, en adelante, supondremos que los coeficientes P, Q, R son funciones continuas con derivadas primeras también continuas en un dominio D del espacio euclídeo E_3 referido dicho espacio al sistema cartesiano $(O; x, y, z)$. Supondremos también que la suma $|P| + |Q|$ no es nula en ningún punto de D.

Decimos que C es una *curva característica* de la ecuación (1) si los vectores de componentes P, Q, R, en cada punto de C, son tangentes a C. Con las condiciones impuestas a los coeficientes de (1) ocurre que las curvas características se reparten regularmente dentro del dominio D, en el sentido de que por cada punto del dominio pasa *una sola* curva característica. Es decir, el dominio queda "peinado".

De la definición anterior se desprende: *Toda superficie formada por curvas características de la ecuación (1) es una superficie integral de dicha ecuación.*

En efecto, sea S una superficie formada por curvas características de (1) que se apoyan en una curva regular transversal a ellas. En virtud de este supuesto y de las condiciones que impusimos a los coeficientes de (1), la superficie S tiene plano tangente en cada punto. Consideremos uno de estos planos tangentes y sea A punto de

contacto. Por A pasará una única curva característica C contenida en S. El vector de componentes P, Q, R, en el punto A es tangente a C, puesto que A es un punto de C, y C es característica (definición). Por lo tanto, ese vector (P, Q, R) estará contenido en el plano tangente a S en el punto A. Pero ésta es, como ya hemos visto, condición necesaria y suficiente para que S sea una superficie integral de la ecuación (1).

4.2. Sistema característico

Consideremos de nuevo la ecuación (1) y sea C una curva regular del dominio $D \subset E_3$. Vimos ya en el breve repaso de análisis vectorial que el vector unitario tangente a una curva en un punto genérico de ella es:

$$\vec{w} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k}.$$

Si queremos que C sea una curva característica de la ecuación (1), los vectores $P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ en cada punto de C deberán ser tangentes a C; por lo tanto, las componentes P, Q, R de estos vectores deben ser proporcionales, en cada punto de C, a las correspondientes componentes de los vectores unitarios tangentes (cosenos directores de las tangentes a las curvas); es decir:

$$P = \mu\frac{dx}{ds}, \qquad Q = \mu\frac{dy}{ds}, \qquad R = \mu\frac{dz}{ds},$$

Se entiende que el coeficiente de proporcionalidad μ es, general, una función de x, y, z, que en cada punto de C se convierte en un número. Las tres igualdades anteriores pueden escribirse así:

$$\frac{dx}{P} = \frac{ds}{\mu}, \qquad \frac{dy}{Q} = \frac{ds}{\mu}, \qquad \frac{dz}{R} = \frac{ds}{\mu},$$

lo cual implica:

$$\boxed{\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}} \tag{5}$$

Estas igualdades reciben el nombre de *sistema característico* de la ecuación (1), y está constituido por ecuaciones DIFERENCIALES ORDINARIAS, llamadas también *ecuaciones asociadas* a la ecuación en derivadas parciales.

Antes de seguir recordemos que, dada una ecuación (1):

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z),$$

hemos venido considerando otra ecuación, la (2):

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

que es *lineal*, homogénea y ofrece, además, una simetría respecto de las tres variables (ahora independientes) x, y, z. Esta ecuación (2) se obtiene a partir de la (1) mediante la llamada "transformación de Jacobi". Se dice que (2) es la "forma de Jacobi" de la ecuación (1).

Sea $\Phi(x,y,z)=c$ la solución general de una de las ecuaciones del sistema (5), o de cualquier otra de un sistema equivalente al (5) obtenido por una transformación conveniente del mismo (veremos esto después), donde c es una constante arbitraria. Vamos a demostrar que la función $\Phi(x,y,z)$ es solución de la ecuación (2) (forma de Jacobi).

Diferenciemos $\Phi(x,y,z)=c$, sobre la base de ser continua $\Phi(x,y,z)$ en un dominio $D \subset E_3$ con derivadas primeras continuas en D:

$$d\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=0.$$

Pero al deducir el sistema característico, uno de cuyos haces integrales es, por hipótesis, $\Phi(x,y,z)=c$, vimos que era:

$$dx=P\frac{ds}{\mu},\qquad dy=Q\frac{ds}{\mu},\qquad dz=R\frac{ds}{\mu}.$$

Sustituyendo estas expresiones en $d\Phi=0$, tenemos:

$$\left(P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+R\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\frac{ds}{\mu}=0,$$

lo cual implica:

$$P\frac{\partial\Phi}{\partial x}+Q\frac{\partial\Phi}{\partial y}+R\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,$$

que prueba que $\Phi(x,y,z)$ es solución de la ecuación (2). Por lo tanto, las funciones implícitas z dadas por $\Phi(x,y,z)=c$ para cada valor de c son soluciones de la ecuación (1), como hemos visto en el apartado d) de este párrafo 4.

Si queremos obtener, pues, metódicamente una solución particular de la ecuación en derivadas parciales (1) hallaremos antes una integral $\Phi(x,y,z)=c$ de su sistema característico, y la función implícita z dada por esa integral, para cada valor de c, es una solución particular de (1). De hecho, $\Phi(x,y,z)=c$ es un haz integral de (1), aunque no la solución general, como veremos a continuación:

4.3. Solución general de la ecuación (1)

Sean $u_1(x,y,z) = c_1$, $u_2(x,y,z) = c_2$ dos integrales independientes del sistema característico (5); o sea, dos soluciones generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias de (5), o bien de otras deducidas de (5) por una transformación conveniente de dicho sistema característico. Repetimos que estas integrales $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$ han de ser independientes.

Si demostramos que la solución más general de la ecuación (2):

$$P\frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q\frac{\partial \Phi}{\partial y} + R\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

es $u = F(u_1, u_2)$, donde F es una función arbitraria, entonces la solución general de la ecuación (1):

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R$$

será $u = F(u_1, u_2) = c$, como ya hemos visto en el aserto d) de este párrafo 4, repetidamente citado.

Hagamos en la ecuación (2) un cambio de las tres variables independientes x, y, z, sustituyéndolas por otras r, s, t, dadas del siguiente modo:

$$r = u_1(x,y,z), \qquad s = u_2(x,y,z)), \qquad t = u_3(x,y,z),$$

donde las funciones independientes u_1 y u_2 son las que, por hipótesis, habíamos obtenido del sistema característico (5) al hallar dos integrales $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$. La tercera función u_3 va a ser libremente elegida o construida por nosotros, pero con dos condiciones (aparte su diferenciabilidad): que sea independiente de u_1 y u_2, y que *no satisfaga* a la ecuación (2).

Con este cambio de las tres variables x, y, z, las derivadas parciales que figuran en la ecuación (2) serán:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x},$$

y análogamente $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial z}$. En lugar de escribir en los segundos miembros

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial t}{\partial z}$$

podemos escribir respectivamente

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

Entonces las derivadas parciales de (2) quedan así:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u_3}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u_3}{\partial z},$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2), nos queda:

$$\left(P\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q\frac{\partial u_1}{\partial y} + R\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial r} +$$
$$+\left(P\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q\frac{\partial u_2}{\partial y} + R\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s} +$$
$$+\left(P\frac{\partial u_3}{\partial x} + Q\frac{\partial u_3}{\partial y} + R\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

Ahora bien, en el apartado "Sistema característico" demostramos que si $\Phi(x, y, z) = c$ es una integral de (5), la función $\Phi(x, y, z)$ es solución de la ecuación (2). Como $u_1 = c_1, u_2 = c_2$ son, por hipótesis, integrales de (5), las funciones u_1 y u_2 satisfacen a la ecuación (2) y, por lo tanto, las expresiones que hay dentro de los dos primeros paréntesis de la ecuación (6) serán idénticamente nulas. En cambio, no es idénticamente nula la expresión que hay dentro del tercer paréntesis, pues la función u_3 ha sido elegida de forma que *no satisface a la ecuación* (2). Por lo tanto, la ecuación (6), que es la propia ecuación (2) con un cambio de variables, equivale a la ecuación siguiente: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, donde u es función de r, s, t. Por ser el primer miembro la derivada parcial de u respecto de t, serán constantes r y s. Entonces, al integrar $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ no aparece una constante de integración, sino una función arbitraria de r y s (variables que se considera constantes); es decir, $u = F(r, s)$; o lo que es lo mismo: $u = F(u_1, u_2)$. He aquí, pues, que la solución más general de la ecuación (2) es función arbitraria de las dos funciones independientes u_1, u_2 obtenidas como primeros miembros de dos integrales del sistema característico.

Ahora bien, si cualquiera que sea F es $F(u_1, u_2)$ solución de (2), será $F(u_1, u_2) = c$ solución de la ecuación (1), según sabemos; y será la solución general. Puede escribirse: $F(u_1, u_2) - c = 0$; o sea: $G(u_1, u_2) = 0$.

Resumiendo: un método para hallar la solución general de la ecuación

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

consiste en obtener dos integrales independientes $u_1(x,y,z) = c_1$, $u_2(x,y,z) = c_2$ del sistema característico

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

La solución general buscada es $F(u_1, u_2) = 0$, donde F es arbitraria; o bien: $u_2 = f(u_1)$; o bien $u_1 = g(u_2)$, donde f y g son funciones arbitrarias.

Como consecuencia de lo anterior, las intersecciones de las superficies del haz $u_1 = c_1$ con las del haz $u_2 = c_2$ son curvas características.

* * *

Todo lo dicho es generalizable a ecuaciones casi lineales con funciones de más de dos variables independientes. Si una ecuación es, por ejemplo,

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = S,$$

el sistema característico será:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{du}{S},$$

del cual, si es posible, podrá obtenerse tres integrales independientes:

$$u_1(x,y,z,u) = c_1, \qquad u_2(x,y,z,u) = c_2, \qquad u_3(x,y,z,u) = c_3.$$

La solución *general* de la ecuación dada será:

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

donde F es una función arbitraria. La correspondiente forma de Jacobi es:

$$P\frac{\partial w}{\partial x} + Q\frac{\partial w}{\partial y} + R\frac{\partial w}{\partial z} + S\frac{\partial w}{\partial u} = 0$$

4.4. Algunas formas de obtener integrales del sistema característico

Una de las ecuaciones del sistema (5) es, por ejemplo, $Q\,dx - P\,dy = 0$, donde Q y P son, en general, funciones de las tres variables x, y, z, en tanto que sólo figuran en dicha ecuación las diferenciales de x e y. Si Q y P fueran funciones sólo de x e y podríamos, para integrar la ecuación, aplicar los métodos ya explicados en "Ecuaciones diferenciales ordinarias" al tratar de las ecuaciones de la forma

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0,$$

averiguando si nuestra ecuación es de variables separables, o si es homogénea, o si es reducible a homogénea, o si es diferencial exacta, o si admite algún factor integrante.

Pero en el sistema característico (5) intervienen, probablemente, las tres variables en cada una de sus ecuaciones. Podemos, entonces, intentar transformar dicho sistema en otros de los cuales se obtenga una ecuación diferencial ordinaria fácilmente integrable. A veces puede conseguirse esto mediante las siguientes equivalencias elementales:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{k_1 dx}{k_1 P} = \frac{k_2 dy}{k_2 Q} = \frac{k_3 dz}{k_3 R} =$$
$$= \frac{k_1 dx + k_2 dy}{k_1 P + k_2 Q} = \ldots = \frac{k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz}{k_1 P + k_2 Q + k_3 R},$$

eligiendo k_1, k_2, k_3 (que no solamente pueden ser constantes sino también funciones) de forma que una, al menos, de las igualdades constituya una ecuación integrable con facilidad.

Por ejemplo, sea el sistema característico:

$$\frac{dx}{y^2 - z^2} = \frac{dy}{x^2 + 2z^2} = \frac{dz}{3(x^2 + 2y^2)}.$$

Multiplicando por 2 los términos de la primera fracción y sumándolos a los correspondientes de la segunda, nos queda:

$$\frac{2\,dx + dy}{x^2 + 2y^2}.$$

Esta fracción es equivalente a cualquiera de las anteriores; de modo que igualándola a la tercera y simplificando resulta:

$$2\,dx + dy = \frac{1}{3} dz,$$

cuya integración es inmediata:

$$\frac{1}{3} z - 2x - y = c.$$

Esta integral es, como ya sabemos, un haz de superficies integrales de la siguiente ecuación en derivadas parciales;

$$(y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + 2z^2)\frac{\partial z}{\partial y} = 3(x^2 + 2y^2).$$

Supongamos ahora este otro sistema característico:

$$\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}.$$

Multiplicando por x los dos términos de la primera fracción, por y los de la segunda y por z los de la tercera, y sumando numeradores y denominadores, nos queda:

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}.$$

Por el hecho de ser nulo el denominador exigiremos que el numerador sea también nulo. Esto puede justificarse teniendo en cuenta que la fracción obtenida es equivalente a las del sistema característico, y podemos escribir, por ejemplo:

$$\frac{dz}{x-y} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0},$$

lo cual "equivale" a:

$$(x-y)(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = 0.$$

Como $x - y$ no es idénticamente nulo, ha de serlo $x\,dx + y\,dy + z\,dz$.

Estableceremos, pues, la regla siguiente: *Si algún denominador del sistema característico es idénticamente nulo, debe serlo también su numerador*. Y esto mismo debe ser aplicado a cualquier sistema de ecuaciones obtenido a partir del sistema característico.

Por ejemplo, si el sistema fuera

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{0},$$

tendría que ser $dz = 0$, con lo cual dispondríamos ya de una integral ($z = c$) de la ecuación que dio origen al sistema característico.

Del mismo modo, si en la fracción equivalente

$$\frac{k_1\,dx + k_2\,dy + k_3\,dz}{k_1P + k_2Q + k_3R}$$

elegimos k_1, k_2, k_3 *no todos nulos*, de manera que sea idénticamente nulo el denominador, ha de serlo también el numerador. Y si dicho numerador resultase ser una diferencial exacta, podríamos ya obtener una integral.

En general, con este procedimiento de los multiplicadores, constantes o variables, k_1, k_2, k_3, se trata de saber elegirlos de manera que el denominador de la fracción anterior sea idénticamente nulo y que el numerador (que ha de ser nulo también) sea una diferencial exacta.

Veamos un ejemplo típico, algo más general que el anterior. Se trata de integrar la ecuación:

$$(az - by)\frac{\partial z}{\partial x} + (bx - cz)\frac{\partial z}{\partial y} = cy - ax.$$

El sistema característico es:

$$\frac{dx}{az - by} = \frac{dy}{bx - cz} = \frac{dz}{cy - ax}.$$

Utilicemos los multiplicadores, por ahora indeterminados, k_1, k_2, k_3, de forma que se anule el denominador de la fracción:

$$\frac{k_1\,dx + k_2\,dy + k_3\,dz}{k_1(az - by) + k_2(bx - cz) + k_3(cy - ax)}.$$

Podemos escribir dicho denominador de las dos maneras siguientes:

$$a(zk_1 - xk_3) + b(xk_2 - yk_1) + c(yk_3 - zk_2);$$
$$x(bk_2 - ak_3) + y(ck_3 - bk_1) + z(ak_1 - ck_2).$$

La anulación de este denominador puede lograrse haciendo que sean nulas independientemente las tres expresiones entre paréntesis de la primera forma; o también las de la segunda. Si hacemos lo primero, tendremos el siguiente sistema de ecuaciones finitas, lineal y homogéneo, cuyas indeterminadas van a ser k_1, k_2, k_3:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} & zk_1 & & & - & xk_3 & = 0 \\ - & yk_1 & + & xk_2 & & & = 0 \\ & & - & zk_2 & + & yk3 & = 0 \end{array}\right\}$$

El determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = xyzz - xyz,$$

idénticamente nulo. Por lo tanto, hay otras soluciones, además de la trivial $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Como el rango de la matriz del sistema es 2, podemos prescindir de una cualquiera de las tres ecuaciones: por ejemplo, de la segunda. Despejemos k_1 en la primera y k_2 en la tercera:

$$k_1 = \frac{xk_3}{z}, \qquad k_2 = \frac{yk_3}{z}.$$

Una solución no trivial inmediata se obtiene dando a k_3 el "valor" z, con lo cual resulta:

$$k_1 = x, \qquad k_2 = y, \qquad k_3 = z.$$

Para estos "valores" de las k se anula el denominador de la fracción

$$\frac{k_1\,dx + k_2\,dy + k_3\,dz}{k_1P + k_2Q + k_3R};$$

por lo tanto, el numerador debe ser idénticamente nulo; es decir,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0.$$

Se trata de una diferencial exacta, cuya integral es

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1.$$

Si expresamos el denominador en la segunda de las formas consideradas anteriormente, y hacemos lo mismo, llegamos también a un sistema homogéneo en las indeterminadas k_1, k_2, k_3, cuya matriz es de rango 2, obteniéndose como solución más sencilla no trivial:

$$k_1 = a, \qquad k_2 = b, \qquad k_3 = c.$$

El numerador de la fracción resulta ser la diferencial exacta

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz,$$

que igualada a cero e integrada nos da:

$$ax + by + cz = c_2.$$

Tenemos, pues, dos integrales de la ecuación en derivadas parciales que, además, son independientes. La *solución general* de la ecuación será $F(c_1, c_2) = 0$; o bien $c_2 = f(c_1)$, o también $c_1 = g(c_2)$, donde F, f, g son, como ya sabemos, funciones arbitrarias. Naturalmente, en vez de hacer figurar c_1 y c_2 bajo las f y g, haremos figurar

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{y} \quad ax + by + cz$$

respectivamente.

Las curvas características de la ecuación dada son las intersecciones de las superficies esféricas del haz $x^2 + y^2 + z^2 = c_1$ con los planos del haz $ax + by + cz = c_2$. Son, pues, circunferencias.

Algunos ejemplos:

1) Hallar la solución general de la ecuación:

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

Trataremos de obtener dos integrales (independientes) del sistema característico:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

La segunda ecuación equivale a: $\dfrac{dz}{z} - \dfrac{dy}{y} = 0$, que integrada da $\ln|z| - \ln|y| = \ln|c_1|$; o sea, $\dfrac{z}{y} = c_1$. Hay que hallar ahora otra integral, independiente de la anterior, cosa que no parece inmediata en el sistema, pues habríamos de utilizar alguna de estas dos ecuaciones:

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy}, \qquad \frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dz}{2xz},$$

en cada una de las cuales intervienen las tres variables en forma finita, pero sólo dos bajo forma diferencial. Veamos, pues, si podemos transformar el sistema característico, utilizando multiplicadores, de manera que aparezca alguna ecuación fácilmente integrable. Dicho sistema, multiplicándolo por $2x$, nos da este otro,

$$\frac{2x\,dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Multipliquemos los dos términos de la segunda fracción por $2y$, los de la tercera por $2z$, sumemos numeradores y denominadores e igualemos la fracción resultante a cualquiera de las dos últimas; por ejemplo, a $\frac{dz}{z}$. Tendremos:

$$\frac{2x\,dx+2y\,dy+2z\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{dz}{z}.$$

Esta ecuación ya es integrable, porque los numeradores de ambos miembros son las diferenciales de los respectivos denominadores; sus integrales son los logaritmos naturales de estos últimos (en valor absoluto). Nos queda:

$$\ln(x^2+y^2+z^2)-\ln|z|=\ln|c_2|;$$

o sea:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{z}=c_2.$$

La solución general de la ecuación dada es, pues:

$$F\left(\frac{z}{y},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right)=0,$$

donde F es una función arbitraria.

En este ejemplo hay otra forma de encontrar una segunda integral del sistema característico sin necesidad de emplear multiplicadores, pero utilizando la primera integral obtenida, que era $\frac{z}{y}=c_1$. Si despejamos aquí z y sustituimos su expresión en la primera ecuación del sistema, nos queda:

$$\frac{dx}{x^2-(c_1^2+1)y^2}=\frac{dy}{2xy}.$$

Llamando A al coeficiente c_1^2+1, la ecuación puede escribirse así:

$$2xy\,dx+(Ay^2-x^2)\,dy=0,$$

donde sólo figuran las variables x, y y sus diferenciales primeras. Es una ecuación homogénea de grado 2, y podemos aplicar, para su integración, el método correspondiente que vimos en la parte "Ecuaciones diferenciales ordinarias". Dividiendo por y^2 tenemos:

$$2\frac{x}{y}dx+\left(A-\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)dy=0.$$

Hacemos el cambio $\frac{x}{y}=u$, que implica $dx=u\,dy+y\,du$. Sustituyendo y separando las variables y y u nos queda:

$$\frac{dy}{y} + \frac{2u\,du}{A+u^2} = 0,$$

ecuación inmediatamente integrable:

$$\ln|y| + \ln|A+u^2| = \ln|c_2|,$$

o sea: $y(A+u^2) = c_2$. Deshaciendo los cambios queda:

$$y\left(c_1^2 + 1 + \frac{x^2}{y^2}\right) = c_2.$$

Finalmente, sustituyendo c_1 por su expresión dada por la primera integral

$$\left(c_1 = \frac{z}{y}\right)$$

resulta:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y} = c_2.$$

También esta integral es independiente de la $\frac{z}{y} = c_1$. Es análoga a la obtenida por el procedimiento de los multiplicadores, pero no la misma. Ambas son haces de superficies esféricas con centros a lo largo de los ejes z e y, respectivamente, y tangentes al plano xy las primeras, y al plano xz las segundas. Como la primera integral $\frac{z}{y} = c_1$ es un haz de planos, las curvas características son, en ambos casos, circunferencias.

Si al emplear los multiplicadores hubiéramos igualado a $\frac{dy}{y}$ la fracción equivalente, habríamos obtenido la misma integral de la ecuación homogénea.

2) Cuando estudiábamos las ecuaciones de la forma

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

en la parte "Ecuaciones diferenciales ordinarias", se planteaba en ocasiones el problema de encontrar un factor integrante $\mu(x,y)$ que nos condujera a una ecuación diferencial exacta:

$$\mu P(x,y)\,dx + \mu Q(x,y)\,dy = 0$$

donde, como es sabido, son iguales las llamadas "derivadas cruzadas" de los coeficientes μP, μQ; es decir:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Haciendo las derivaciones indicadas, resulta:

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Utilizando los símbolos P_y, Q_x para las derivadas de P y de Q respectivamente, tenemos la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(P_y - Q_x).$$

La función desconocida es el factor integrante $\mu(x, y)$ que tratamos de encontrar.

Así, pues, en estos casos, buscar un factor integrante (metódicamente) implica hallar una solución particular de una ecuación en derivadas parciales.

Veamos el siguiente ejemplo: La ecuación *ordinaria*

$$(x^2y^3 + 2y)\,dy + (2x - 2x^3y^2)\,dy = 0$$

no es de variables separables, ni homogénea, ni reducible a homogénea, ni diferencial exacta. Tratemos de encontrar un factor integrante $\mu(x, y)$ que la convierta en diferencial exacta, lo cual nos lleva, dentro del método, a obtener una solución particular de la siguiente ecuación en derivadas:

$$(2x - 2x^3y^2)\frac{\partial \mu}{\partial x} - (x^2y^3 + 2y)\frac{\partial \mu}{\partial y} = 9x^2y^2\mu,$$

cuyo sistema característico es:

$$\frac{dx}{2x - 2x^3y^2} = \frac{dy}{-x^2y^3 - 2y} = \frac{d\mu}{9x^2y^2\mu}.$$

Multiplicando por y los términos de la primera fracción, por x los de la segunda, sumando numeradores y denominadores e igualando la fracción resultante a la tercera del sistema, tenemos sucesivamente:

$$\frac{y\,dx + x\,dy}{-3x^3y^3} = \frac{d\mu}{9x^2y^2\mu}; \qquad \frac{y\,dx + x\,dy}{-xy} = \frac{d\mu}{3\mu};$$

$$-3\frac{dx}{x} - 3\frac{dy}{y} = \frac{d\mu}{\mu}.$$

La integración es inmediata, y resulta

$$\ln|\mu| = -3\ln|xy| + \ln|c| = \ln 1 - 3\ln|xy| \quad \text{(si hacemos } c = \pm 1\text{)}.$$

Por lo tanto, una solución particular, o sea, un factor integrante, es

$$\mu = \frac{1}{x^3y^3}.$$

5. ECUACION LINEAL DE PRIMER ORDEN

Si hay dos variables independientes, la ecuación lineal de primer orden completa tiene la forma general siguiente:

$$P(x, y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\,\frac{\partial z}{\partial y} = zR_1(x, y) + R_2(x, y), \tag{7}$$

donde vamos a suponer que P, Q, R_1, R_2 son funciones continuas con derivadas continuas en un abierto del plano $(O; x, y)$, conexo y no vacío (o sea, en un dominio del plano euclídeo).

El sistema característico

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R_1 z + R_2} \tag{8}$$

puede ser transformado en otro utilizando los multiplicadores, lo mismo que se ha hecho en la ecuación casi lineal, con el fin de obtener alguna ecuación diferencial ordinaria fácilmente integrable.

Pero aquí, en el sistema (8), ocurre que su primera ecuación es independiente de z. Podría encontrarse entonces una primera integral, que tendrá la forma $u_1(x, y) = c_1$. Si en esta integral es posible despejar alguna de las dos variables, por ejemplo y, tendremos $y = v(x, c_1)$. Sustituyendo esta expresión en P, R_1, R_2, y considerando la ecuación

$$\frac{dx}{P} = \frac{dz}{R_1 z + R_2},$$

ésta adoptará la forma:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z\, v_1(x, c_1) + v_2(x, c_1)}{v_3(x, c_1)},$$

o lo que es lo mismo:

$$z' + a(x, c_1) z = b(x, c_1).$$

Se trata de una ecuación lineal de primer orden (diferencial ordinaria) que sabemos integrar. La integral es:

$$z = \frac{1}{p} \int p\, b(x, c_1)\, dx + \frac{c_2}{p}, \quad \text{donde} \quad p = e^{\int a(x, c_1) dx}.$$

En definitiva, puede ser escrita así: $z\, \phi(x, c_1) + \psi(x, c_1) = c_2$. Y sustituyendo c_1 por su expresión dada por la primera integral $c_1 = u_1(x, y)$, tendremos la segunda integral en la forma: $z\, \alpha(x, y) + \beta(x, y) = c_2$. La solución general de la ecuación (7) va a contener una función arbitraria que haremos actuar solamente sobre c_1 con el fin de despejar z. Es decir, expresaremos así la solución general: $c_2 = f(c_1)$, donde f es una función arbitraria. Sustituyendo c_2 y c_1 por sus expresiones equivalentes, nos queda al final la solución general de (7) en la forma:

$$z = \eta(x, y)\, f(u_1(x, y)) + \delta(x, y),$$

donde f es arbitraria.

El desarrollo anterior, en su aspecto práctico, parte de dos supuestos: que la primera ecuación del sistema (8) es *fácilmente* integrable (se demuestra que existe una

integral), y que puede despejarse x o y en la integral. Pero ya hemos dicho que si no se da el primer supuesto podemos utilizar el procedimiento de los multiplicadores para llegar, si asimismo ello es posible, a ecuaciones fácilmente integrables.

La generalización a ecuaciones lineales de primer orden con más de dos variables independientes no ofrece ninguna dificultad formal. Su lenguaje geométrico se referirá a espacios y variedades de dimensión mayor.

6. EL PROBLEMA DE CAUCHY

Nos referiremos a una ecuación casi lineal con dos variables independientes:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z).\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \qquad (1)$$

El llamado "problema de Cauchy" es un problema de condiciones iniciales. Se trata de hallar una superficie integral de (1) que pase por una curva γ, que puede venir dada por sus ecuaciones paramétricas: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$.

Vamos a establecer las condiciones siguientes:

Condiciones referentes a la ecuación (1)

a) Las funciones P, Q, R son continuas con derivadas primeras continuas en un dominio D del espacio euclídeo E_3.

b) Las funciones P, Q, no son nulas simultáneamente en ningún punto del dominio D.

Condiciones referentes a la curva γ

c) La curva está contenida en el mismo dominio D al que se refieren las condiciones anteriores.

d) La adherencia de la proyección de γ sobre el plano xy no tiene punto doble.

e) Las funciones f, g, h de las ecuaciones paramétricas de γ son continuas con derivadas primeras continuas en un intervalo $I = (t_1, t_2)$ del parámetro t.

f) Las derivadas $f'(t)$, $g'(t)$ no se anulan simultáneamente para ningún valor de t perteneciente a I.

g) El determinante

$$\begin{vmatrix} f'(t) & g'(t) \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero para todo t perteneciente a I.

Esta condición es llamada de "transversalidad", y se entiende que la segunda fila se expresa en función de t por medio de las ecuaciones paramétricas de γ.

Si se cumplen las condiciones expuestas, se demuestra:

1) Que existe una superficie integral de la ecuación (1) que pasa por la curva γ.

2) Que dicha superficie es única.

No lo vamos a demostrar. La demostración puede verse en cualquier tratado de ecuaciones en derivadas parciales.

Tengamos en cuenta que por una curva *característica* de una ecuación (1) pasan infinitas superficies integrales. Esto es fácilmente intuible del siguiente modo:

Si a es una curva característica de (1) y es A un punto de a, hagamos pasar por A una curva γ *no característica* contenida en el dominio $D \subset E_3$ de la condición a). Puesto que el dominio está peinado, por cada punto de γ pasa una sola curva característica, y el conjunto de ellas constituye, como ya vimos en otro lugar, una superficie integral de (1). Pero por el punto $A \in a$ pasan infinitas curvas γ_i no características contenidas en D, con lo cual cada curva γ_i es transversal a un conjunto simplemente infinito de curvas características que constituyen una superficie integral de (1). Habrá, pues, un número infinito de superficies integrales que pasan por la curva característica a.

Vamos a ver también que, dada una ecuación (1) y una curva

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),$$

reconoceremos si esta curva es o no característica comprobando si se verifica o no:

$$\frac{f'(t)}{P(x,y,z)} = \frac{g'(t)}{Q(x,y,z)} = \frac{h'(t)}{R(x,y,z)},$$

poniendo los denominadores en función de t por medio de las ecuaciones paramétricas de la curva. Sabemos, en efecto, que la ecuación de la tangente a la curva en un punto (x_0, y_0, z_0) de ella, correspondiente a un $t = t_0 \in I$, es

$$\frac{x - x_0}{f'(t_0)} = \frac{y - y_0}{g'(t_0)} = \frac{z - z_0}{h'(t_0)}.$$

Los denominadores son proporcionales a los cosenos directores de dicha tangente. Para que la curva sea característica de la ecuación (1), estos denominadores, con t genérico, deben ser también proporcionales a P, Q, R, puestos en función de t.

El problema de Cauchy puede resolverse apoyándose en las consideraciones siguientes, sobre la base de que se cumplen las condiciones antes enunciadas para la existencia y unicidad de la solución:

Sean

$$u_1(x,y,z) = c_1,\ u_2(x,y,z) = c_2$$

dos soluciones independientes del sistema característico de (1) y, por lo tanto, dos familias uniparamétricas independientes de superficies integrales de (1). Sea γ una curva que cumple las condiciones c) a g), ambas inclusive, enunciadas anteriormente, y que viene dada por dos ecuaciones

$$\varphi_1(x,y,z) = 0,\ \varphi_2(x,y,z) = 0$$

obtenidas por eliminación del parámetro t.

Como ya hemos dicho, existe una sola superficie integral S de (1) que contiene a γ. Ahora bien, en virtud de la condición g), la curva γ es transversal a las curvas características que forman la superficie integral S; o sea, que todas las curvas características que constituyen S cortan a γ en puntos en los cuales los vectores de componentes (P,Q,R) no están sobre las tangentes a γ en esos puntos. Por otra parte, las curvas características que forman S es claro que constituyen un conjunto simplemente infinito que está contenido en el conjunto doblemente infinito de características dadas por el sistema

$$u_1(x,y,z) = c_1,\ u_2(x,y,z) = c_2;$$

aquí ambas constantes son arbitrarias puesto que, por hipótesis, son independientes u_1 y u_2. Así, pues, toda curva característica de S satisface al sistema anterior y corta a la curva γ. Por lo tanto, para este conjunto S de características, es decir, para los puntos de S, el sistema:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,y,z) &= c_1 \\ u_2(x,y,z) &= c_2 \\ \varphi_1(x,y,z) &= 0 \\ \varphi_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

es compatible. Entre tres cualquiera de estas ecuaciones, las variables x, y, z son funciones de c_1 ó de c_2 ó de ambas, y estas funciones deben satisfacer a la ecuación restante. Por ejemplo, entre las tres primeras ecuaciones es

$$x = f(c_1,c_2),\ y = g(c_1,c_2),\ z = h(c_1,c_2),$$

que sustituidas en la cuarta dan:

$$\varphi_2(f(c_1,c_2),\ g(c_1,c_2),\ h(c_1,c_2)) = 0.$$

O sea, llegamos a una relación funcional, siempre la misma,

$$G(c_1,c_2) = 0,$$

donde G es ahora una función perfectamente determinada. Que teníamos que llegar a una relación funcional entre c_1 y c_2 era ya evidente, puesto que hallar S es seleccionar una determinada familia uniparamétrica de curvas características entre las incluidas en la familia biparamétrica $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$. Como acabamos de ver, esta relación funcional se obtiene eliminando las variables x, y, z en el sistema (9). Si sustituimos c_1 y c_2 por u_1 y u_2 en $G(c_1,c_2) = 0$ tendremos la ecuación de la superficie integral S.

En resumen: el problema de Cauchy, con dos variables independientes, puede resolverse eliminando x, y, z en (9).

Antes de ver algún ejemplo, recordemos que un *dominio* es un conjunto abierto, conexo y no vacío. Al decir "conexo" queremos decir *conexo por arcos*.

Un conjunto T de puntos es conexo por arcos si *todo* par de puntos de T puede ser unido por un camino contenido en T. Un círculo es conexo por arcos. Si excluimos la circunferencia frontera, tendremos un abierto conexo y no vacío; es decir, un dominio del plano euclídeo. También es conexo por arcos una corona circular, pues dos puntos cualesquiera de ella pueden ser unidos siempre por un camino contenido en la corona. Si excluimos las circunferencias fronteras tendremos también un dominio del plano. El espacio euclídeo E_3 es un dominio, pues es abierto (y en este caso cerrado al mismo tiempo), conexo y no vacío.

Otra cosa distinta es el *orden de conexión*. Un círculo es *simplemente conexo*, porque *toda curva cerrada* contenida en él puede reducirse a un punto por deformación continua sin salir del círculo; o sea, toda curva cerrada en el círculo es homótopa a un punto. Una corona circular es conexa, pero no simplemente conexa, porque hay curvas cerradas que no son homótopas a un punto. En general, si un recinto plano conexo tiene n agujeros, el recinto (puede ser dominio) es conexo de orden $n+1$. Una corona circular es doblemente conexa, porque tiene un agujero.

Ejemplo:

Hallar la superficie integral de la ecuación

$$x(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz^2$$

que pasa por la curva (en este caso recta) $3x - y = 0,\ z = 3$.

Veamos si se cumplen las condiciones para la existencia y unicidad de la solución:

a) Las funciones

$$P = x(x+y),\ Q = y^2,\ R = yz^2$$

son continuas, para toda terna de valores $(x, y, z) \in E_3$.

b) Las funciones P y Q se anulan simultáneamente sólo cuando es $x = y = 0$. Hemos de suprimir, pues, en E_3 los puntos $(0, 0, z)$, o sea, el eje z, con lo cual nos queda un dominio más restringido.

c) La curva $3x - y = 0,\ z = 3$ (que es una recta en nuestro caso) puede expresarse en paramétricas despejando y, por ejemplo, en la primera ecuación. Si llamamos $x = t$, queda: $x = t,\ y = 3t,\ z = 3$, que está definida en nuestro dominio para todo $t \neq 0$ (pues si hacemos $t = 0$, obtenemos el punto $(0, 0, 3)$ perteneciente a la recta suprimida en E_3). El intervalo I de t estará constituido, pues, por los dos abiertos $(-\infty, 0),\ (0, \infty)$.

d) Es claro que al estar la recta contenida en el plano $z = 3$, su proyección sobre el plano xy no tiene punto múltiple.

e) Las funciones $x = t,\ y = 3t,\ z = 3$ son continuas, con derivadas primeras continuas en I.

f) Las derivadas $x' = 1,\ y' = 3$ es claro que nunca son nulas.

g) El determinante

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4t^2 & 9t^2 \end{vmatrix}$$

sólo se anula para $t = 0$, lo que ratifica el intervalo I de t antes obtenido. Por lo tanto, la superficie que se trata de hallar existe y es única, con la restricción impuesta a E_3. Para obtenerla, hallaremos dos integrales independientes del sistema característico

$$\frac{dx}{x^2 + xy} = \frac{dy}{y^2} = \frac{dz}{yz^2}.$$

La última ecuación es inmediatamente integrable, resultando

$$\frac{1}{z} + \ln|y| = c_1.$$

La primera ecuación puede ponerse en la forma

$$(x^2 + xy)\,dy - y^2 dx = 0.$$

Es homogénea de grado 2. Dividamos por x^2 y hagamos $y/x = u$, o sea,

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Sustituimos, y nos queda:

$$(1 + u)(u\,dx + x\,du) - u^2\,dx = 0,$$

que equivale a

$$u\,dx + x(1 + u)\,du = 0,$$

y es de variables separables:

$$\left(1 + \frac{1}{u}\right)du + \frac{dx}{x} = 0.$$

Su integral es:

$$u + \ln|u| + \ln|x| = c_2.$$

Deshaciendo el cambio tenemos:

$$\frac{y}{x} + \ln|y| = c_2.$$

Para hallar la superficie integral que pasa por $3x - y = 0$, $z = 3$, eliminamos x, y, z entre las cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z} + \ln|y| = c_1 \\ \dfrac{y}{x} + \ln|y| = c_2 \\ 3x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Resulta: $c_2 - c_1 = 8/3$. Sustituyendo c_1 y c_2 por sus expresiones equivalentes, se obtiene la superficie:

$$z = \frac{3x}{3y - 8x}.$$

7. ECUACION GENERAL DE PRIMER ORDEN

Hasta ahora sólo hemos considerado ecuaciones de primer orden casi lineales y lineales; es decir, ecuaciones de la forma:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z),$$

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=z\,R_1(x,y)+R_2(x,y),$$

respectivamente, ceñidas a dos variables independientes x,y. Por lo tanto, se ha excluido a las ecuaciones de primer orden que no son lineales en las derivadas parciales y a las que son multilineales en ellas como, por ejemplo,

$$z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-x\frac{\partial z}{\partial y}=z^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \text{etc.}$$

En este párrafo 7 vamos a considerar ecuaciones de primer orden con dos variables independientes x,y lineales y no lineales, cualquiera que sea la forma de su no linealidad. Con un simbolismo amplio, las anotaremos así:

$$\varnothing\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$$

Y si llamamos p y q a las dos derivadas parciales primeras, o sea,

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

la ecuación general de primer orden será:

$$\varnothing(x,y,z,p,q)=0 \tag{10}$$

donde supondremos, en adelante, que la función $\varnothing$ tiene derivadas parciales primeras respecto de las cinco variables x,y,z,p,q y que dichas derivadas son continuas en un dominio del espacio euclídeo E_5.

7.1. Integral completa e integral general

Consideremos una familia de superficies con dos parámetros α y β dada por

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \tag{11}$$

donde F tiene derivadas parciales continuas primeras en un dominio de E_3. Derivemos respecto a x y respecto a y :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0; \quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Si eliminamos α y β entre estas dos ecuaciones y la (11) obtendremos una ecuación de primer orden en las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=q;$$

es decir: $\varphi(x,y,z,p,q) = 0$ que es satisfecha, evidentemente, por la familia de superficies (11). O sea: una familia biparamétrica de superficies engendra o genera una ecuación de primer orden en derivadas parciales.

Supongamos ahora una ecuación general de primer orden tal como la (10). Llamamos *integral completa* de (10) a toda solución de esta ecuación en la cual figuren dos constantes arbitrarias; o sea, a toda familia de superficies integrales de (10) con dos parámetros. Así, pues, si las superficies de la ecuación (11) fueran integrales de (10), dicha ecuación (11) sería una integral completa de (10).

Por otra parte, la *solución general* de (10) contiene una *función arbitraria*, que da un espectro más amplio de superficies integrales de (10).

Dada una integral completa de una ecuación de primer orden, podemos obtener la solución general utilizando el método de la variación de las constantes. Veámoslo:

Partimos de la siguiente ecuación de primer orden,

$$\varphi(x,y,z,p,q)=0 \tag{10}$$

y se supone que hemos hallado una integral completa de la misma,

$$F(x,y,z,\alpha,\beta)=0 \tag{11}.$$

Sabemos ya que eliminando α y β entre esta integral y sus derivadas

$$F_x+F_z p=0, \quad F_y+F_z q=0,$$

obtenemos la ecuación dada (10).

Hagamos que las constantes arbitrarias α y β de (11) no sean constantes, sino funciones $\alpha(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ donde z es, a su vez, función de x y de y. Siendo ello así, podemos diferenciar (11), resultando:

$$dF=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz+F_\alpha\,d\alpha+F_\beta\,d\beta=0;$$

pero es $dz = p\,dx + q\,dy$. Sustituyendo esta expresión en dF y sacando dx, dy factores comunes, tenemos:

$$dF=(F_x+F_z p)\,dx+(F_y+F_z q)\,dy+F_\alpha\,d\alpha+F_\beta\,d\beta=0.$$

Si fuera idénticamente nula la suma $F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta$, nos quedaría

$$dF = (F_x + F_z\, p)\, dx + (F_y + F_z\, q)\, dy = 0,$$

lo cual implica

$$F_x + F_z\, p = 0,\ F_y + F_z\, q = 0.$$

Entre estas dos expresiones y la (11) podríamos eliminar α y β y obtendríamos la ecuación (10), lo mismo que cuando eran constantes α y β, pues en el proceso de eliminación es indiferente que α y β sean constantes o variables. Es decir, si α y β, son funciones de x, y, z, la expresión (11) será una integral de (10) cuando se verifique $F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta = 0$. Ahora bien, puesto que es $\alpha = \alpha(x, y, z)$, $\beta = \beta(x, y, z)$, será:

$$d\alpha = \alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + \alpha_z\, dz,$$

$$d\beta = \beta_x\, dx + \beta_y\, dy + \beta_z\, dz;$$

y como $dz = p\, dx + q\, dy$, tendremos:

$$d\alpha = \alpha_x\, dx + \alpha_y\, dy + a_z(p\, dx + q\, dy) = (\alpha_x + p\,\alpha_z)\, dx + (\alpha_y + q\,\alpha_z)\, dy,$$

$$d\beta = \beta_x\, dx + \beta_y\, dy + \beta_z(p\, dx + q\, dy) = (\beta_x + p\,\beta_z)\, dx + (\beta_y + q\,\beta_z)\, dy,$$

que sustituidas en la condición impuesta $F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta = 0$ nos da finalmente:

$$[F_\alpha(\alpha_x + p\,\alpha_z) + F_\beta(\beta_x + p\,\beta_z)]dx + [F_\alpha(\alpha_y + q\,\alpha_z) + F_\beta(\beta_y + q\,\beta_z)]dy = 0,$$

lo cual implica que han de satisfacerse las dos condiciones:

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha(\alpha_x + p\alpha_z) + F_\beta(\beta_x + p\beta_z) = 0 \\ F_\alpha(\alpha_y + q\alpha_z) + F_\beta(\beta_y + q\beta_z) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

para que la ecuación (11), con α y β funciones de x, y, z, sea una integral de (10).

Estas condiciones (12) pueden satisfacerse de tres maneras:

1°) Que sean nulas F_α y F_β. En tal caso, eliminando α y β entre las ecuaciones

$$F_\alpha = 0,\ F_\beta = 0 \quad \text{y} \quad F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

obtendremos una superficie $G(x, y, z) = 0$, que *puede ser solución* de la ecuación dada (10). Caso de serlo, nos encontraríamos con una superficie integral que no procede de concretar una función arbitraria ni de dar valores a constantes arbitrarias, puesto que $G(x, y, z) = 0$ no depende ni de una ni de otras. Se dice entonces que $G(x, y, z) = 0$ es una *solución singular* de (10).

2°) Que sean constantes α y β, en cuyo caso serán nulas las expresiones entre paréntesis de las condiciones (12). Entonces volvemos al hecho de que la ecuación (11) es una integral completa de (10), o sea, una familia biparamétrica de superficies integrales de (10).

3°) Si no se dan los dos supuestos anteriores, las condiciones (12) escritas en la forma

$$F_\alpha(\alpha_x + p\alpha_z) = -F_\beta(\beta_x + p\beta_z)$$
$$F_\alpha(\alpha_y + q\alpha_z) = -F_\beta(\beta_y + q\beta_z)$$

pueden dividirse, y nos queda:

$$(\alpha_x + \alpha_z p)(\beta_y + \beta_z q) - (\alpha_y + \alpha_z q)(\beta_x + \beta_z p) = 0,$$

lo cual no es otra cosa que:

$$\begin{vmatrix} \alpha_x + \alpha_z p & \alpha_y + \alpha_z q \\ \beta_x + \beta_z p & \beta_y + \beta_z q \end{vmatrix} = 0.$$

Pero este determinante del primer miembro es el jacobiano de las funciones

$$\alpha(x, y, z),\ \beta(x, y, z)$$

respecto de x e y, teniendo en cuenta que también z es función de x e y. Y puesto que este jacobiano es nulo, es que existe una dependencia funcional entre las funciones $\alpha(x, y, z)$ y $\beta(x, y, z)$. Es decir, existe una función ξ tal que $\xi(\alpha, \beta) = 0$.

Por lo tanto, si establecemos desde el principio que las funciones α y β tienen una dependencia funcional cualquiera, $\xi(\alpha, \beta) = 0$, o bien $\beta = \eta(\alpha)$, con ξ ó η arbitrarias, será nulo el jacobiano

$$\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(x, y)},$$

de lo cual podrá deducirse las condiciones (12), sobre la base de no ser nulas idénticamente las derivadas F_α, F_β que hemos de introducir como factores en las mencionadas condiciones. O sea, que las condiciones (12) se satisfarán si establecemos *a priori* que las funciones, α y β son funcionalmente dependientes.

De esta manera obtenemos la solución general de una ecuación (10) a partir de una integral completa (11). He aquí el método:

1°) Suponemos que los parámetros α y β de (11) son funciones de x, y, z, donde z es, a su vez, función de x e y.

2°) Suponemos que α y β son funcionalmente dependientes, estableciendo

$$\beta = \eta(\alpha), \tag{13}$$

donde η es una función arbitraria, que más tarde hemos de concretar y que ha de ser diferenciable.

3º) La diferencial de β será:

$$d\beta = \eta'(\alpha)\, d\alpha,$$

que sustituida en la condición primitivamente impuesta:

$$F_\alpha\, d\alpha + F_\beta\, d\beta = 0$$

nos da:

$$F_\alpha + F_\beta\, \eta'(\alpha) = 0 \tag{14}$$

4º) La función arbitraria η de (13) es la que nos va a permitir encontrar todas las soluciones particulares de (10), excepto las singulares, del siguiente modo: Se concreta o define η (derivable). Se despeja α en (14) en función de x, y, z, pues aunque aparezca β se le sustituye por $\eta(\alpha)$. La expresión de α obtenida se la reemplaza en

$$F(x, y, z, \alpha, \eta(\alpha)) = 0,$$

obteniéndose una solución particular

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

que puede estar o no estar contenida en la integral completa (11).

Así pues, basta obtener una integral completa de (10) para llegar a la solución general. Existen varios métodos para encontrar una integral completa de la ecuación general de primer orden (10). Uno de ellos es el que explicamos a continuación.

7.2. Método de Lagrange–Charpit.

El *sistema característico* de la ecuación (10) es el siguiente:

$$\frac{dx}{\varphi_p} = \frac{dy}{\varphi_q} = \frac{dz}{p\varphi_p + q\varphi_q} = \frac{dp}{-\varphi_x - p\varphi_z} = \frac{dq}{-\varphi_y - q\varphi_z} \tag{15}$$

que, como vemos, está constituido por ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$P(x, y, z, p, q)\, dx + Q(x, y, z, p, q)\, dy = 0,$$

o con las diferenciales de las otras variables.

Utilizando multiplicadores, quizá podría obtenerse de este sistema característico una ecuación que fuera fácilmente integrable, análogamente a lo que hicimos en algunos ejemplos referidos a sistemas característicos de ecuaciones casi lineales. La integral de una ecuación cualquiera del sistema (15), o de otra deducida de él, será en general de la forma

$$f(x, y, z, p, q) = c,$$

y diremos que es una integral del sistema característico.

Demos al método el siguiente orden:

1°) Nos dan la ecuación general de primer orden

$$\varphi(x, y, z, p, q) = 0 \tag{10}$$

y formamos su sistema característico (15). Hallamos una integral

$$f(x, y, z, p, q) = c_1 \tag{16}$$

de dicho sistema (si ello es posible), por el procedimiento de los multiplicadores, por ejemplo.

2°) Despejamos p y q entre la (10) y la (16), cosa que será posible si

$$\frac{\partial(\varphi, f)}{\partial(p, q)} \neq 0,$$

y obtendremos:

$$p = g(x, y, z, c_1), \quad q = h(x, y, z, c_1).$$

Estas dos funciones satisfacen tanto a (10) como a (16).

Como, por otra parte, es $dz = p\,dx + q\,dy$, sustituyendo aquí las expresiones de p y q, tenemos la ecuación en diferenciales totales:

$$dz - g(x, y, z, c_1)\,dx - h(x, y, z, c_1)\,dy = 0 \tag{17}$$

(Se puede demostrar que esta ecuación (17) es diferencial exacta).

3°) Se integra (17) y obtenemos:

$$S(x, y, z, c_1) = c_2. \tag{18}$$

Se trata de una familia de superficies con dos parámetros. Esta familia es solución de (10), puesto que siendo (17) diferencial exacta, y escribiéndola en la forma:

$$dz = g(x, y, z, c_1)\,dx + h(x, y, z, c_1)\,dy,$$

será

$$g(x, y, z, c_1) = \frac{\partial z}{\partial x} = p, \; h(x, y, z, c_1) = \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

En (18) es z función de x e y; por lo tanto,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Las derivadas parciales, obtenidas de (18), son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial S}{\partial x}}{\dfrac{\partial S}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial S}{\partial y}}{\dfrac{\partial S}{\partial z}},$$

y coinciden, pues, con $g(x, y, z, c_1)$ y $h(x, y, z, c_1)$ respectivamente, que satisfacen a (10).

La familia biparamétrica de superficies (18) es, pues, una integral completa de (10).

Ejemplos:

Deseamos hallar una integral completa de la ecuación

$$x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Podemos expresar así la ecuación: $p^2x - pz + q^2 = 0$. El sistema característico definido en la fórmula (15) es aquí:

$$\frac{dx}{2px - z} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 - zp + 2q^2} = \frac{dp}{-p^2 + p^2} = \frac{dq}{pq}.$$

La cuarta fracción tiene nulo el denominador; por lo tanto, $dp = 0$; o sea: $p = c_1$, que ya es una integral del sistema característico. Entre esta integral y la ecuación dada debemos despejar p y q (p ya ha quedado despejada). Por lo tanto, es

$$q = \sqrt{c_1(z - c_1x)}.$$

Debemos integrar ahora la ecuación en diferenciales totales:

$$dz = c_1dx + \sqrt{c_1}\sqrt{z - c_1x}\,dy,$$

que podemos escribir así:

$$\frac{dz - c_1\,dx}{\sqrt{z - c_1x}} = \sqrt{c_1}\,dy.$$

Observamos que el numerador es la diferencial del radicando del denominador, por lo cual la integración es inmediata, y obtenemos:

$$2\sqrt{z - c_1x} = \sqrt{c_1}\,y + c_2,$$

que es una integral completa de la ecuación dada, puesto que tiene dos parámetros c_1 y c_2.

Siguiendo lo dicho en el apartado anterior, podemos hallar la solución general a partir de esta integral, estableciendo previamente $c_2 = \eta(c_1)$.

Otro ejemplo puede ser el siguiente: nos dan la ecuación $p^2 + q(x - z) = 0$. El sistema característico es

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{x - z} = \frac{dz}{2p^2 + q(x - z)} = \frac{dp}{-q + pq} = \frac{dq}{q^2}.$$

Multiplicando por p los dos términos de la primera fracción, por q los de la segunda, sumando numeradores y denominadores e igualando a la tercera fracción, se tiene:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

que integrada nos da

$$z - px - qy = c_1,$$

y será una integral del sistema característico. Entre esta integral y la ecuación dada es posible despejar p y q, como fácilmente se advierte, y como se desprende de no ser nulo el jacobiano de los primeros miembros respecto de p y q. Se integra después la correspondiente ecuación en diferenciales $dz - p\,dx - q\,dy = 0$.

8. ECUACIONES DE SEGUNDO ORDEN

8.1. Operadores lineales parciales.

Si la función real $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n variables reales es continua con derivadas segundas continuas en un dominio del espacio euclídeo E_{n+1}, los operadores que anotaremos

$$D_{x_k},\ D^2_{x_{kk}},\ D^2_{x_{km}}$$

tienen el significado siguiente:

$$D_{x_k}(z) = \frac{\partial z}{\partial x_k},\ D^2_{x_{kk}}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2},\ D^2_{x_{km}}(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_k \partial x_m}.$$

Son, por tanto, operadores diferenciales parciales lineales. El primero es de primer orden, y los dos últimos de segundo orden.

Formalmente es

$$D^2_{x_{kk}} = D_{x_k} D_{x_k},\quad D^2_{x_{km}} = D_{x_k} D_{x_m}.$$

Este último producto formal es conmutativo en virtud del teorema de Schwarz sobre la indiferencia en el orden de la derivación, con las condiciones impuestas a la función z.

Supongamos que la función z es una función de sólo dos variables independientes, $z = f(x, y)$, con las condiciones exigidas al principio. En tal caso consideraremos solamente los cinco operadores lineales siguientes:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_y = \frac{\partial}{\partial y},\ D^2_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ D^2_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},\ D^2_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Una forma lineal completa en los operadores D_x y D_y es $aD_x + bD_y + c$, donde supondremos que los coeficientes a, b, c son constantes. Esta forma lineal es, a su vez, un operador L con el obvio significado siguiente:

$$Lz = (a\,D_x + b\,D_y + c)z = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + c\,z.$$

Una forma cuadrática completa en los operadores D_x y D_y será:

$$L^2 = a D_x^2 + b D_x D_y + c D_y^2 + d D_x + e D_y + g,$$

donde también supondremos que los coeficientes son constantes. Los términos de segundo grado indicarán siempre operadores de segundo orden. El término bilineal $b D_x D_y$ puede ser escrito así: $b D_{xy}$, de acuerdo con la notación establecida. Por la misma razón, debemos escribir D_{xx}^2, D_{yy}^2 en vez de D_x^2, D_y^2 respectivamente. Una forma cuadrática L^2 en D_x, D_y es a su vez, un operador lineal con el siguiente significado, igualmente obvio:

$$L^2 z = a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + e\frac{\partial z}{\partial y} + g z$$

Las formas cuadráticas en D_x, D_y son, pues, polinomios formales de segundo grado en los referidos operadores. A veces pueden ser fácilmente factorizados descomponiéndolos en el producto formal de dos polinomios de primer grado en D_x y D_y. Por ejemplo, la forma cuadrática

$$L^2 = D_{xx}^2 + 3D_{xy}^2 - D_x - 6D_y - 2$$

es fácilmente factorizable, pues tenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} L^2 &= D_x D_x + 3D_x D_y - 2D_x + D_x - 6D_y - 2 = \\ &= D_x(D_x - 2) + 3D_y(D_x - 2) + D_x - 2 = \\ &= (D_x + 3D_y + 1)(D_x - 2). \end{aligned}$$

Hemos descompuesto L^2 en el producto formal de dos operadores polinómicos de primer orden lineales.

Es evidente que las formas lineales con coeficientes constantes en D_x, D_y son operadores conmutativos, pues si $z = f(x, y)$ tiene derivadas segundas, es:

$$\begin{aligned} &(aD_x + bD_y + c)(pD_x + qD_y + r)z = \\ &= (pD_x + qD_y + r)(aD_x + bD_y + c)z = \\ &= ap\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (aq + bp)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + bq\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \\ &+ (ar + cp)\frac{\partial z}{\partial x} + (br + cq)\frac{\partial z}{\partial y} + cr\, z, \end{aligned}$$

si son constantes los coeficientes. No son, en general, conmutativos los operadores constituidos por formas lineales en D_x D_y con coeficientes variables, como fácilmente puede comprobarse con diferentes ejemplos.

En lo que sigue nos referimos a funciones $z = f(x, y)$ continuas, con derivadas segundas continuas en un dominio del espacio euclídeo E_3. Sobre estas funciones haremos actuar a los operadores L^2 constituidos por formas cuadráticas en D_x, D_y con coeficientes constantes.

8.2. Ecuaciones lineales de 2º orden en derivadas parciales.

Una expresión de la forma $L^2z = k$ es una ecuación lineal de segundo orden en derivadas parciales con coeficientes constantes donde, como hemos dicho, z es una función (desconocida) de sólo dos variables independientes.

Llamaremos ecuación lineal *homogénea* de segundo orden a una cualquiera de la forma $L^2z = 0$ siempre que L^2 sea una forma cuadrática homogénea. Por ejemplo, son homogéneas las ecuaciones

$$(3\,D_{xx}^2 - 2\,D_{yy}^2)z = 0,$$

$$(a\,D_{xx}^2 - b\,D_{xy}^2 + c\,D_{yy}^2)z = 0.$$

Llamaremos ecuación lineal *seudohomogénea* de segundo orden a una cualquiera de la forma $L^2z = 0$ siempre que L^2 contenga, al menos, un término de primer grado en D_x ó D_y o término independiente. Por ejemplo, son seudohomogéneas las ecuaciones

$$(3\,D_{xx}^2 - 2\,D_y)z = 0, \quad (D_{xy}^2 + 3\,D_{yy}^2 - 1)\,z = 0.$$

Si

$$u_1(x, y),\ u_2(x, y), \ldots, u_n(x, y)$$

son soluciones particulares de una ecuación lineal homogénea o seudohomogénea $L^2z = 0$, toda combinación lineal de ellas:

$$\sum_1^n k_j\,u_j(x, y)$$

es también solución de la ecuación, puesto que L^2 es un operador diferencial lineal. Y esto vale también, por la misma razón, cuando L^2 tiene coeficientes variables.

Si $u(x, y)$ es una solución particular de la ecuación $L^2z = 0$, y $\zeta(x, y)$ es una solución particular de $L^2z = h$, donde L^2 es el mismo anterior, la suma $u(x, y) + \zeta(x, y)$ es también solución de $L^2z = h$, pues

$$L^2(u + \zeta) = L^2u + L^2\zeta = L^2\zeta = h.$$

Estas dos propiedades anteriores las vimos también en las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias.

En ellas vimos entonces que $u + \zeta$ (con una variable) era la solución general siempre que u fuera la solución general, con n constantes arbitrarias, de la correspondiente homogénea o seudohomogénea de orden n. Pero en las ecuaciones $L^2z = 0$ en derivadas parciales la solución genereal contiene *funciones arbitrarias*. Entonces, la solución general de $L^2z = h$ será también $u(x, y) + \zeta(x, y)$, siempre que $u(x, y)$ sea la solución general de $L^2z = 0$.

Veamos dos ecuaciones homogéneas concretas:

$$(D_{xx}^2 - D_{yy}^2)z = 0,$$
$$(D_{xx}^2 + D_{yy}^2)z = 0 \quad \text{(Ecuación de Laplace.)}$$

La primera es inmediatamente factorizable, transformándose en

$$(D_x + D_y)(D_x - D_y)z = 0.$$

Como los dos operadores entre paréntesis son conmutativos, podemos también escribir:

$$(D_x - D_y)(D_x + D_y)z = 0.$$

En ambos casos los primeros miembros son nulos si se verifica respectivamente:

$$(D_x - D_y)z = 0, \quad (D_x + D_y)z = 0;$$

es decir, si se satisfacen las ecuaciones lineales de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

cuyas respectivas soluciones generales son:

$$z = \mu(x + y), \; z = \nu(x - y),$$

donde μ y ν son funciones arbitrarias. La solución general de

$$(D_{xx}^2 - D_{yy}^2)z = 0$$

es

$$z = \mu(x + y) + \nu(x - y).$$

La ecuación de Laplace

$$(D_{xx}^2 + D_{yy}^2)z = 0$$

es también factorizable, obteniéndose inmediatamente

$$(D_x + iD_y)(D_x - iD_y)z = 0.$$

Lo mismo que antes, son conmutativos los operadores de primer orden, con lo cual el primer miembro es cero si se satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x} - i\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

cuyas soluciones generales son, respectivamente,

$$z = \mu(x - iy), \quad z = \nu(x + iy).$$

La solución general de la ecuación de Laplace será:

$$z = \mu(x - iy) + \nu(x + iy).$$

Estos resultados nos invitan a sugerir, para cualquier ecuación homogénea lineal de segundo orden, soluciones de la forma

$$z = \mu(x + \lambda y),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

En las dos ecuaciones que acabamos de ver eran soluciones

$$z = \mu(x + y), \quad z = \mu(x + iy)$$

respectivamente. En ecuaciones homogéneas más generales pueden ser esperadas soluciones también más generales que las anteriores, pero de la misma forma:

$$z = \mu(x + \lambda y),$$

donde λ será un número real o complejo.

Consideremos una ecuación homogénea $L^2 z = 0$ completa

$$(a D^2_{xx} + b D^2_{xy} + c D^2_{yy}) z = 0, \tag{19}$$

donde a, b, c son constantes.

Si la forma cuadrática homogénea se pudiera descomponer fácilmente en un producto formal de dos operadores de primer orden, el problema se reduciría a resolver dos ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes obteniendo sus soluciones generales. Pero no siempre es sencillo obtener dicho producto formal. Por ello, y en vista de los resultados anteriores, supondremos que (19) tiene una solución de la forma $z = \mu(x + \lambda y)$, y veamos qué condición debe satisfacer λ para que $z = \mu(x + \lambda y)$ sea efectivamente, solución de (19). Hallando las tres derivadas segundas de z y sustituyéndolas en (19) nos queda la condición:

$$c\lambda^2 + b\lambda + a = 0.$$

Si es $b^2 - 4ac > 0$, hay dos valores de λ reales y distintos (que llamaremos λ_1 y λ_2) que cumplen dicha condición, en cuyo caso obtendremos dos soluciones de (19), que serán:

$$z = \mu(x + \lambda_1 y) \quad z = \nu(x + \lambda_2 y),$$

donde μ y ν son funciones arbitrarias. La solución general de (19) es, entonces

$$z = \mu(x + \lambda_1 y) + \nu(x + \lambda_2 y).$$

Si es $b^2 - 4ac < 0$, acontece lo mismo, pero siendo λ_1 y λ_2 imaginarios conjugados.

Veamos el caso $b^2 - 4ac = 0$. Habrá una raíz doble λ y, de momento, no podremos obtener más que la solución $z = \mu(x + \lambda y)$. Para encontrar otra, supongamos de nuevo que hay dos raíces distintas complejas λ_1 y λ_2 y formulemos la expresión:

$$\frac{\mu(x + \lambda_2 y) - \mu(x + \lambda_1 y)}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Sobre la base de estas raíces distintas, tanto $\mu(x+\lambda_1 y)$ como $\mu(x+\lambda_2 y)$ son soluciones de (19); luego también la expresión formulada es solución de (19), por ser combinación lineal de

$$\mu(x+\lambda_1 y), \quad \mu(x+\lambda_2 y).$$

Si hacemos que λ_2 tienda a $\lambda_1 = \lambda$, el límite de la referida expresión formulada es la derivada de $\mu(x+\lambda y)$ respecto de λ, y este límite es, asimismo, solución de (19) cuando la ecuación condicionante $c\lambda^2 + b\lambda + a = 0$ tiene la raíz doble λ. Es decir,

$$z = y\mu'(x+\lambda y) = y\nu(x+\lambda y)$$

es también solución de (19) si $b^2 - 4ac = 0$. La solución general de (19) será, en este caso:

$$z = \mu(x+\lambda y) + y\nu(x+\lambda y),$$

donde λ es la raíz doble, y $\nu = \mu'$.

Si la ecuación homogénea no fuera completa, sería de alguna de las formas siguientes:

$$\begin{array}{lll} (a D^2_{xx} + b D^2_{xy})z = 0; & (a D^2_{xx} + c D^2_{yy})z = 0; & (b D^2_{xy} + c D^2_{yy})z = 0; \\ a D^2_{xx} z = 0; & b D^2_{xy} z = 0; & c D^2_{yy} z = 0 \end{array}$$

En el primer caso, la ecuación condicionante es $b\lambda + a = 0$ con una única raíz λ, siendo por lo tanto $z = \mu(x+\lambda y)$ una solución. Pero se advierte que toda función arbitraria de y es también solución. Así, pues, la solución general del primer caso es

$$z = \mu(x+\lambda y) + \nu(y).$$

En los casos segundo y tercero la ecuación condicionante tiene dos raíces distintas, pudiéndose formular la solución general con dos funciones arbitrarias. Los tres últimos casos son triviales y se resuelven mediante dos integraciones.

Cuando se trata de una ecuación completa seudohomogénea con coeficientes constantes

$$(a D^2_{xx} + b D^2_{xy} + c D^2_{yy} + d D_x + e D_y + g)z = 0, \tag{20}$$

se supone soluciones de tipo exponencial:

$$z = k e^{px+qy}.$$

Para que una expresión como esta satisfaga a (20) tendremos que hallar las derivadas de primero y segundo orden que figuran en la ecuación, en la cual serán sustituidas. Se obtiene la siguiente ecuación condicionante:

$$ap^2 + bpq + cq^2 + dp + eq + g = 0, \tag{21}$$

a la cual deben satisfacer p y q para que $z = k\,e^{px+qy}$ sea efectivamente, una solución de (20).

De la ecuación (21) podemos despejar p en función de q, obteniéndose, en general, dos funciones $p = \alpha(q)$, $p = \beta(q)$; con lo cual son soluciones particulares de (20) todas las de la forma

$$z = k\,e^{\alpha(q)\,x+qy}, \quad z = k\,e^{\beta(q)\,x+qy},$$

donde q y k son arbitrarias.

La ecuación (21) es la de una cónica en el plano $(0; p, q)$. Según que $b^2 - 4ac$ sea positivo, negativo o nulo, la cónica es de tipo hipérbola, elipse o parábola. Se dice entonces que la ecuación (20) es *hiperbólica, elíptica* o *parabólica* respectivamente.

Llegados a este punto debemos advertir que en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales procedentes de los problemas físicos suelen venir dadas unas condiciones iniciales. Obtenida una ecuación y conocidas dichas condiciones, se trata de encontrar una solución o soluciones que las cumplan. Estos problemas son los llamados *problemas de contorno*, y se resuelven generalmente utilizando soluciones particulares que cumplan sólo algunas de las condiciones iniciales para combinarlas de manera que se obtenga otra que las cumpla todas.

Desde un punto de vista práctico no merece la pena continuar buscando la solución general de las ecuaciones $L^2 z = k$, porque es mucho más interesante resolver problemas de contorno.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Integrar la ecuación

$$(x - 3z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z + y)\frac{\partial z}{\partial y} = x + 3y$$

Es una ecuación casi lineal, cuyo sistema característico es el siguiente:

$$\frac{dx}{x - 3z} = \frac{dy}{z + y} = \frac{dz}{x + 3y}.$$

La ecuación ordinaria dada por la primera igualdad es equivalente a esta otra:

$$\frac{dx}{x - 3z} = \frac{3\,dy}{3z + 3y}.$$

Sumando numeradores y denominadores e igualando el resultado a la tercera fracción del sistema característico, queda

$$\frac{dx + 3\,dy}{x + 3y} = \frac{dz}{x + 3y}$$

lo cual implica

$$dz - dx - 3\,dy = 0.$$

Integrando, tenemos:

$$z-(x+3y)=c_1,$$

que es una familia uniparamétrica de superficies integrales de la ecuación dada.

Podemos hallar otra, independientemente de la anterior, de varias maneras. En este caso, el método general (hay otros más breves) será despejar z en la familia obtenida y sustituirla en la primera igualdad del sistema característico. Resulta:

$$\frac{dx}{-2x-9y-3c_1}=\frac{dy}{x+4y+c_1}\Leftrightarrow (x+4y+c_1)\,dx+(2x+9y-3c_1)\,dy=0.$$

Esta última es una ecuación diferencial ordinaria de las que son reducibles a homogéneas (recuérdese cap. 2). Como las rectas correspondientes a las dos formas lineales se cortan en un punto propio,

$$\alpha=3c_1,\ \beta=-c_1,$$

haremos el cambio $x=u+3c_1,\ y=v-c_1$, y nos queda la homogénea

$$(u+4v)\,du+(2u+9v)\,dv=0.$$

Integrando esta ecuación, restituyendo las variables x, y y sustituyendo c_1 por $z-(x+3y)$, tenemos una segunda familia uniparamétrica de superficies integrales:

$$\frac{2x+9y-3z}{3x+9y}+\ln|x+3y|=c_2.$$

La integral general de la ecuación dada será $c_2=f(c_1)$, donde f es una función arbitraria. O sea:

$$\frac{2x+9y-3z}{3x+9y}+\ln|x+3y|=f(z-x-3y).$$

2. Tenemos una ecuación lineal en derivadas de la forma

$$\frac{\partial z}{\partial x}-h(x)\frac{\partial z}{\partial y}=h(x),$$

donde se supone que $h(x)$ es distinta de cero excepto, a lo sumo, en un número finito de puntos. Se pide:

a) Hallar una solución particular de la ecuación.

b) Si $h(x)$ es la convolución de las funciones

$$f(x)=3e^{-x},\ g(x)=e^{2x},$$

hallar otra superficie integral en forma explícita $z=\varphi(x,y)$ que sea independiente de la solución anterior.

c) Con la expresión de $h(x)$ obtenida antes, hallar la superficie integral que pasa por la curva

$$C\equiv\begin{cases}e^x-y=0\\ z=3\end{cases}$$

comprobando previamente que C no es característica y que se cumplen las condiciones de existencia y unicidad de la solución.

a) Del sistema característico

$$dx = \frac{dy}{-h(x)} = \frac{dz}{h(x)}$$

se desprende: $dz + dy = 0$, de donde $z + y = c_1$, que es una familia de soluciones, una de las cuales es, por ejemplo, $z = -y$.

b) La convolución de las funciones $f(x) = 3e^{-x}$, $g(x) = e^{2x}$ es

$$f(x) * g(x) = 3 \int_0^x e^{-(x-t)} e^{2t}\, dt = e^{-x}(e^{3x} - 1).$$

O sea, $h(x) = e^{2x} - e^{-x}$. La ecuación es ahora

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \left(e^{-x} - e^{2x}\right) \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x} - e^{-x}.$$

Del sistema característico

$$dx = \frac{dy}{e^{-x} - e^{2x}} = \frac{dz}{e^{2x} - e^{-x}}$$

tomemos la ecuación que iguala los miembros primero y tercero, que integrada nos da la familia de soluciones, independiente de la anterior,

$$z - \frac{1}{2} e^{2x} - e^{-x} = c_2.$$

Una solución particular es, por ejemplo,

$$z = \frac{1}{2} e^{2x} + e^{-x}.$$

c) Podemos poner la curva C en paramétricas haciendo $x = t$, con lo cual es

$$C \equiv \begin{cases} x = t \\ y = e^t \\ z = 3 \end{cases}$$

Las derivadas son

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = e^t \\ z' = 0 \end{cases}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{cases} P = 1 \\ Q = e^{-t} - e^{2t} \\ R = e^{2t} - e^{-t} \end{cases}$$

No hay proporcionalidad, pues

$$\frac{P}{x'} = 1 \neq \frac{Q}{y'} = e^{-2t} - e^t.$$

Por lo tanto, la curva C no es característica.

Veamos si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad.

A) Las funciones

$$P = 1,\ Q = e^{-x} - e^{2x},\ R = e^{2x} - e^{-x}$$

son continuas, con derivadas primeras continuas para toda terna (x, y, z).

B) Se verifica $|P| + |Q| \neq 0$ para todo punto del espacio E_3.

C) La curva C pertenece al dominio; está contenida en el plano $z = 3$, siendo una exponencial y, por lo tanto, la adherencia de su proyección sobre el plano xy no tiene punto doble.

D) Las funciones $x = t$, $y = e^t$, $z = 3$ son de clase 1, y sus derivadas no se anulan simultáneamente para ningún t.

E) Respecto de la condición de transversalidad, el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & e^t \\ 1 & e^{-t} - e^{2t} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero (excepto para las raíces de la ecuación $e^{3t} + e^{2t} - 1 = 0$). Por lo tanto, existe solución.

Para hallarla, eliminaremos x, y, z entre las ecuaciones

$$\begin{cases} y + z = c_1 \\ z - (1/2)e^{2x} - e^{-x} = c_2 \\ y = e^x \\ z = 3, \end{cases}$$

y obtenemos

$$(c_1 - 3)^3 - 2(c_1 - 3)(c_2 - 3) + 2 = 0,$$

donde sustituiremos c_1 y c_2 por sus expresiones en función de x, y, z.

3. Una solución del sistema característico de la ecuación

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2$$

es $z - xy = c_1$. Con sólo este dato, hay infinitas expresiones de P y Q que puestas en la ecuación conducen a la mencionada solución. Determínese dos cualesquiera P y Q y hállese la solución general de la ecuación.

La familia de superficies $z - xy = c_1$ ha de satisfacer a la ecuación. Tenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Luego $yP + xQ = y^2 - x^2$. Dos expresiones sencillas de P y Q son $P = y$, $Q = -x$ (esto mismo puede obtenerse a partir del sistema característico, teniendo en cuenta que $dz = y\,dx + x\,dy$). La ecuación será:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2.$$

Otra solución del sistema característico es, por ejemplo, $x^2 + y^2 = c_2$. La solución general es, entonces, $z - xy = f(x^2 + y^2)$. O sea:

$$z = f(x^2 + y^2) + xy.$$

4. Dada la ecuación

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} = 2xz,$$

se pide:

a) Comprobar si

$$\gamma_1 \equiv \begin{cases} y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \end{cases}$$

es una curva característica.

b) Hallar la superficie integral que contiene a la curva

$$\gamma_2 \equiv \begin{cases} x = yz \\ x + y^2 = 0 \end{cases}$$

a) Las ecuaciones de la tangente a una curva $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ en un punto

$$t_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$$

de ella son, como sabemos,

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Los denominadores son proporcionales a los cosenos directores de dicha tangente. Para que la curva γ_1 sea característica de la ecuación dada, los denominadores deben ser también proporcionales a los coeficientes

$$P = x_0^2 - y_0^2 - z_0^2,\ Q = 2x_0y_0,\ R = 2x_0z_0$$

de la ecuación del enunciado en cada punto $t \equiv (x_0, y_0, z_0)$ de la curva γ_1. Podemos poner γ_1 en paramétricas, considerando a z como parámetro:

$$x = \sqrt{z - 2z^2},\ y = z,\ z = z.$$

Las derivadas en un punto genérico de γ_1 son:

$$x' = \frac{1 - 4z}{2\sqrt{z - 2z^2}},\ y' = z' = 1.$$

Las expresiones de P, Q, y R en función de z son:

$$P = z - 4z^2,\ Q = 2z\sqrt{z - 2z^2} = R.$$

Como vemos, se verifica

$$\frac{P(z)}{x'(z)} = \frac{Q(z)}{y'(z)} = \frac{R(z)}{z'(z)}.$$

Luego γ_1 es una curva característica, y por ella pasan infinitas superficies integrales de la ecuación dada.

b) Se comprueba que γ_2 no es característica. Dos soluciones independientes del sistema característico de la ecuación son

$$\frac{z}{y} = c_1, \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{y} = c_2,$$

que se hallan fácilmente. Si ahora eliminamos x, y, z entre estas dos soluciones y las ecuaciones de γ_2 nos queda:

$$y + z = 0,$$

que es la superfice pedida (plano que contiene al eje x, cuya traza en el plano yz es la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto).

5. Sabiendo que la función $z = x^2 - y^2$ es una solución particular de una ecuación:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z),$$

y que

$$\ln|z| - \frac{1}{2}x^2 = k$$

es una integral del sistema característico, determinar dicha ecuación.

Puesto que $z - x^2 + y^2 = 0$ satisface a

$$P\frac{\partial z}{\partial x} + Q\frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

también la satisface toda superficie de la familia $z - x^2 + y^2 = c_1$, siendo c_1 una constante arbitraria. Tenemos, pues, dos familias de superficies integrales independientes:

$$z - x^2 + y^2 = c_1, \quad \ln|z| - \frac{1}{2}x^2 = c_2.$$

La solución general de la ecuación puede escribirse en la forma

$$z - x^2 + y^2 = f\left(\ln|z| - \frac{1}{2}x^2\right),$$

donde f es una función arbitraria. Derivando respecto de x e y resulta:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2x = \left(\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} - x\right)f'; \quad \frac{\partial z}{\partial y} + 2y = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}f'.$$

Dividiendo miembro a miembro y simplificando, nos queda:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}xz\right)\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

6. Una solución particular de la ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = x - \cos y$$

es de la forma

$$z_p = g(x) + h(y).$$

Hállese la solución general de la ecuación.

Es

$$\frac{\partial z_p}{\partial x} = g'(x); \quad \frac{\partial z_p}{\partial y} = h'(y).$$

Sustituimos en la ecuación estas derivadas, y nos queda:

$$\frac{1}{2} g'(x) - h'(y) = x - \cos y,$$

lo cual implica

$$g'(x) = 2x, \quad h'(y) = \cos y.$$

Así, pues, dos primitivas son, respectivamente, $g(x) = x^2$, $h(y) = \operatorname{sen} y$. La solución particular puede ser $z_p = x^2 + \operatorname{sen} y$. Por lo tanto, una familia de soluciones de la ecuación del enunciado será

$$z - x^2 - \operatorname{sen} y = c_1.$$

Otra familia, independiente de la anterior, se obtiene de la ecuación $2\,dx = -dy$ del sistema característico; es decir: $2x + y = c_2$.

La solución general será

$$z = f(2x + y) + x^2 + \operatorname{sen} y,$$

donde f es una función arbitraria.

7. Obtener una integral completa de la ecuación

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Es una ecuación no lineal de primer orden. Llamaremos p y q respectivamente a las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y},$$

con lo cual la ecuación es

$$p^2 + yq - z = 0.$$

Recordemos que el sistema característico de una ecuación $\varphi(x, y, z, p, q) = 0$ es

$$\frac{dx}{\varphi_p} = \frac{dy}{\varphi_q} = \frac{dz}{p\varphi_p + q\varphi_q} = \frac{dp}{-\varphi_x - p\varphi_z} = \frac{dq}{-\varphi_y - q\varphi_z}.$$

Para hallar una integral completa de la ecuación del enunciado utilizaremos el método de Lagrange-Charpit. El sistema característico es, en nuestro caso:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2p^2 + yq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{0}.$$

Como se trata de despejar p y q entre la ecuación dada y una integral cualquiera de su sistema característico, elegiremos la parte más sencilla de este último. Tenemos inmediatamente

$$dq = 0 \Rightarrow \; q = c_1,$$

que sustituido en la ecuación del enunciado nos da

$$p = \sqrt{z - c_1 y}.$$

Estas expresiones de p y q las llevamos a la diferencial

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

y tenemos la ecuación en diferenciales totales

$$dz = \sqrt{z - c_1 y}\,dx + c_1\,dy,$$

cuya integración es inmediata:

$$\frac{dz - c_1\,dy}{\sqrt{z - c_1 y}} = dx;\ \frac{d(z - c_1 y)}{\sqrt{z - c_1 y}} = dx;\ 2\sqrt{z - c_1 y} = x + c_2;$$

de donde

$$z = \frac{1}{4}(x - c_2)^2 + c_1 y.$$

8. Hallar una integral completa de la ecuación $p^2 + q^2 - x = 0$.

El sistema característico es

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)} = dp = \frac{dq}{0}.$$

De la última fracción se obtiene inmediatamente $q = c_1$, que puesta en la ecuación nos da

$$p = \sqrt{x - c_1^2}.$$

La ecuación en diferenciales totales será

$$dz = \sqrt{x - c_1^2}\,dx + c_1\,dy,$$

cuya integral es:

$$z = \frac{2}{3}(x - c_1^2)\sqrt{x - c_1^2} + c_1 y + c_2.$$

9. Integrar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0.$$

Es de segundo orden. Podemos escribirla del siguiente modo:

$$(D_{xy}^2 + D_x - D_y - 1)z = 0,$$

donde formalmente es

$$D_{xy}^2 = D_x D_y.$$

Entonces, el operador entre paréntesis puede factorizarse sin dificultad, pues

$$D_x D_y + D_x - D_y - 1 = D_x(D_y + 1) - (D_y + 1) = (D_x - 1)(D_y + 1).$$

La ecuación será:

$$(D_x - 1)(D_y + 1)z = 0,$$

que se reduce a las dos de primer orden:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -z.$$

Las soluciones generales de ambas son inmediatas; pero las obtendremos de sus sistemas característicos. El de la primera es

$$dx = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

De aquí ya tenemos

$$dy = 0 \Rightarrow \; y = c_1.$$

Otra familia independiente se obtiene integrando

$$\frac{dz}{z} - dx = 0,$$

o sea:

$$\ln|z| - \ln|c_2| = x \Rightarrow \; z = c_2 e^x.$$

Por lo tanto, la solución general de

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z$$

puede ponerse en la forma $c_2 = f(c_1)$; es decir: $z = e^x f(y)$, siendo f una función arbitraria de y.

Del mismo modo obtendremos la solución general de

$$\frac{\partial z}{\partial y} + z = 0,$$

que es $z = e^{-y} g(x)$.

La integral general de la ecuación del enunciado será:

$$z = e^x f(y) + e^{-y} g(x).$$

Si recordamos la ecuación condicionante (21) del apartado 8.2, veremos que la ecuación dada es hiperbólica.

10. Integrar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Haciendo intervenir al operador, la ecuación puede escribirse:

$$(D_{xx}^2 - 3D_{xy}^2 + D_x - 3D_y)z = 0 \equiv \; (D_x D_x - 3D_x D_y + D_x - 3D_y)z = 0.$$

Ya se ve que el operador puede factorizarse inmediatamente, y queda

$$(D_x - 3D_y)(D_x + 1)z = 0,$$

reduciéndose el problema a integrar las dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -z,$$

cuyas soluciones generales son

$$z = f(3x + y), z = e^{-x} g(y).$$

La integral general de la ecuación dada será

$$z = f(3x + y) + e^{-x} g(y).$$

PROPUESTOS

1. Si $u(x, y, z) = c$ es una solución del sistema característico de una ecuación

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R,$$

demostrar que, cualquiera que sea c, la función implícita z dada por $u(x, y, z) = c$ es una superficie integral de dicha ecuación.

2. ¿Cuál es la condición de carácter geométrico necesaria y suficiente para que una superficie $u(x, y, z) = 0$ sea una integral de la ecuación

$$P \frac{\partial z}{\partial x} + Q \frac{\partial z}{\partial y} = R ?$$

3. Sabiendo, que $z(3y - 8x) = 3x$ es una superficie integral de la ecuación

$$P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz^2$$

que pasa por la curva

$$\gamma \equiv \begin{cases} y = xz \\ z = 3 \end{cases}$$

se pide:

a) Hallar el coeficiente P.

b) Probar que γ no es característica.

4. Hallar un factor integrante de la ecuación

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \right) dx + \frac{2}{x} dy = 0.$$

5. Sabiendo que

$$z^2 + e^x + \operatorname{sen} y = c_1, \ \ln |x| + y^2 + e^z = c_2$$

son integrales del sistema característico de la ecuación $Pp + Qq = R$, determinar la ecuación.

6. Integrar la ecuación

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{xy}.$$

7. Dada la recta

$$r\equiv\begin{cases}x-2y-1=0\\ z-3y=0\end{cases}$$

se pide:

a) Hallar dos funciones $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ tales que r sea característica de la ecuación

$$(x+y^2-z)p+Qq=R.$$

b) Utilizando el sistema característico, comprobar si los planos por los cuales se define r son superficies integrales de la ecuación.

c) Hallar la superficie integral que contiene a la circunferencia

$$x^2+y^2+z^2=4,\ z=1.$$

8. Hallar una integral completa de la ecuación

$$pq-p-2xq+2x=0.$$

9. Integrar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

10. Formular una ecuación de segundo orden tal que las funciones

$$z_1=e^{-y}(\cos 2x+i\,\mathrm{sen}\,2x),\ z_2=e^{y}(\cos 2x+i\,\mathrm{sen}\,2x)$$

sean soluciones particulares de ella, y obtener la integral general.

BIBLIOGRAFIA

DOU, A.: *Ecuaciones en derivadas parciales*. Editorial Dossat, S.A. Madrid, 1970.

ELSGOLTZ, L.: *Ecuaciones diferenciales y cálculo varicional*. Editorial MIR, Moscú, 1977.

HILDEBRAND, F.B.: *Métodos de cálculo para ingenieros*. Aguilar. Madrid, 1960.

PETROVSKI, I.G.: *Partial Differential Equations*. Saunders Company. Filadelfia, 1967.

PUIG ADAM, P.: *Ecuaciones diferenciales*. Madrid, 1960.

REY PASTOR-PI CALLEJA-TREJO: *Análisis matemático*. Editorial Kapelusz. Buenos Aires, 1959.

WEINBERGER, Hans F.: *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona-Buenos Aires-México, 1970.

CAPITULO 5

CALCULO NUMERICO DE SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

0. INTRODUCCION

En el capítulo 2 de este libro hemos obtenido las integrales exactas de ciertas ecuaciones diferenciales ordinarias pertenecientes a tipos que permiten tal integración. Es el caso de las ecuaciones lineales de primer orden, las de orden $n > 1$ también lineales con coeficientes constantes, las de Euler, Bernoulli, Lagrange,..., las que son diferenciales exactas o que pueden serlo mediante un factor integrante, y muchas otras más. A las integrales exactas de estas ecuaciones se les suele llamar *soluciones analíticas*. Si una ecuación es de orden n, y hemos logrado hallar su solución general exacta, la determinación de las n constantes arbitrarias de dicha solución general puede hacerse conociendo el valor de la función incógnita y los de sus $n-1$ primeras derivadas en un mismo punto $x = x_0$ (problema de *valores inciales*) o en varios puntos (problema de *contorno*).

La ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + a(x)y = h(x)$ tiene como solución general

$$y = \frac{1}{q(x)} \int q(x)\, h(x)\, dx + \frac{c}{q(x)},$$

donde es

$$q(x) = e^{\int a(x)\, dx}.$$

Esta expresión de y es, efectivamente, la integral *exacta* de la ecuación, independientemente de que se conozca o no una primitiva de $a(x)$ y/o de $q(x)\,h(x)$. Si se conoce estas primitivas, la solución general tiene la forma

$$y = F(x) + c\,G(x). \tag{0.1}$$

Y si hay una condición inicial $y(x_0) = y_0$, la determinación de c se hace sustituyendo en (0.1) las variables x, y por los valores x_0, y_0 respectivamente. Se obtiene así una *solución particular* de la ecuación. Pero todo esto descansa en la posibilidad de llegar a las funciones F y G de (0.1) y en el carácter de las mismas.

El problema de valores iniciales es más laborioso si la ecuación lineal es de orden $n > 1$, aunque tenga coeficientes constantes, porque la solución general exacta se basa

en la de la homogénea correspondiente y, por lo tanto, en las raíces de la ecuación característica. Esta última es ahora de grado $n > 1$. Si suponemos $n < 5$ tendremos la expresión exacta de las raíces por medio de radicales, y pueden ser, ciertamente, raíces enteras; pero es mucho más probable que sean racionales, irracionales o imaginarias. Entonces, a pesar de disponer de la expresión exacta de las raíces, habremos de calcularlas aproximadamente. Y una solución particular que cumpla determinadas condiciones inciales (si existe) añade el problema de hallar los valores de las constantes arbitrarias; y aun antes, habremos de obtener una solución particular de la ecuación diferencial utilizando, por ejemplo, el método de la variación de las constantes.

Como ya es sabido, si el grado de la ecuación característica es igual o superior a 5 no hay, en general, expresión exacta de sus raíces, aunque siga habiéndola de la solución de la ecuación diferencial en función de esas raíces.

En suma, todo lo anterior indica que, aun existiendo solución analítica, la curva correspondiente a un problema de valores iniciales habrá que determinarla de una manera aproximada pues, en general, la solución analítica implica cálculos aproximados.

Pero hay muchísimas otras ecuaciones diferenciales para las cuales no se conoce una expresión exacta de su solución general. Entonces, la curva que ha de cumplir determinadas condiciones iniciales carece del apoyo de esa expresión exacta que puede conducir al cálculo aproximado de la misma. En tales casos -que son la mayoría- existe, sin embargo, la posibilidad de obtener también la curva que deseamos hallar, calculándola aproximadamente en el intervalo que nos interesa. Esto se logra numéricamente con la discretización de la variable x en el referido intervalo.

El cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser utilizado también, evidentemente, en las ecuaciones que tienen solución analítica. Pero es en las otras, en las que no la tienen, donde el método numérico se hace imprescindible.

En el apartado 6.3 del capítulo 2 vimos cómo una ecuación lineal de orden n puede reducirse a un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden. El método es general y aplicable a ecuaciones no lineales, introduciendo las mismas n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que allí utilizábamos.

Por ejemplo, si en la ecuación de tercer orden, no lineal,

$$y''' + xy''y - x^2y^2 = e^x$$

hacemos $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$, será

$$y''' = e^x - x\,y_1\,y_3 + x^2\,y_1^2.$$

Derivando las tres primeras igualdades tendremos:

$$y' = y'_1,\ y'' = y'_2,\ y''' = y'_3;$$

es decir:

$$\begin{cases} y' = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = e^x - x\,y_1\,y_3 + x^2y_1^2. \end{cases}$$

que es un sistema de tres ecuaciones de primer orden (la tercera no es lineal) cuyas funciones desconocidas son y_1, y_2, y_3.

En vista de ello podemos decidir utilizar el método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias sólo para las ecuaciones de primer orden, puesto que cada una de las demás es equivalente a un sistema de las primeras. Sin embargo, es preferible en muchos casos aplicar directamente el cálculo numérico a ecuaciones de orden superior, especialmente a algunas de segundo orden.

En principio trataremos solamente de métodos numéricos en las ecuaciones de primer orden con una condición inicial $y(x_0) = y_0$. Dichas ecuaciones podrán tener o no solución analítica. Lo más probable es que no la tengan.

La secuencia del cálculo en los métodos numéricos se traduce siempre al lenguaje de los ordenadores, que hoy son parte fundamental de esta clase de integración.

Dada una ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y una condición inicial $y(x_0) = y_0$, se trata de obtener aproximadamente los valores de la curva integral -si existe- en un conjunto discreto de puntos del intervalo $[a, b]$ que nos interesa, entre los cuales ha de estar el punto $x = x_0$. Lo primero que haremos será dividir $[a, b]$ en subintervalos iguales, de longitud h elegida por nosotros. Si llevamos h sucesivamente a partir de x_0, tanto a la derecha como a la izquierda, los extremos a y b no coincidirán, en general, con puntos de división. Esto carece de importancia; escogeremos el intervalo de máxima longitud $[x_0 - mh, x_0 + nh]$ contenido en $[a, b]$. A partir de x_0, y a la derecha, habrá entonces n subintervalos de longitud h, y $n + 1$ puntos de división, $x_0, x_1, \ldots, x_n$. En estos puntos es donde vamos a calcular los valores aproximados de la solución de la ecuación diferencial, con la condición $y(x_0) = y_0$. Decimos valores aproximados excluyendo el punto x_0, cuyo valor y_0 en él nos viene dado y suponemos que es exacto. A la longitud h de cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ se le llama *paso*.

Los cálculos que se hace a la derecha de x_0 son también aplicables a los puntos de división situados a su izquierda; o sea, son válidos cuando se considera que el paso h es negativo.

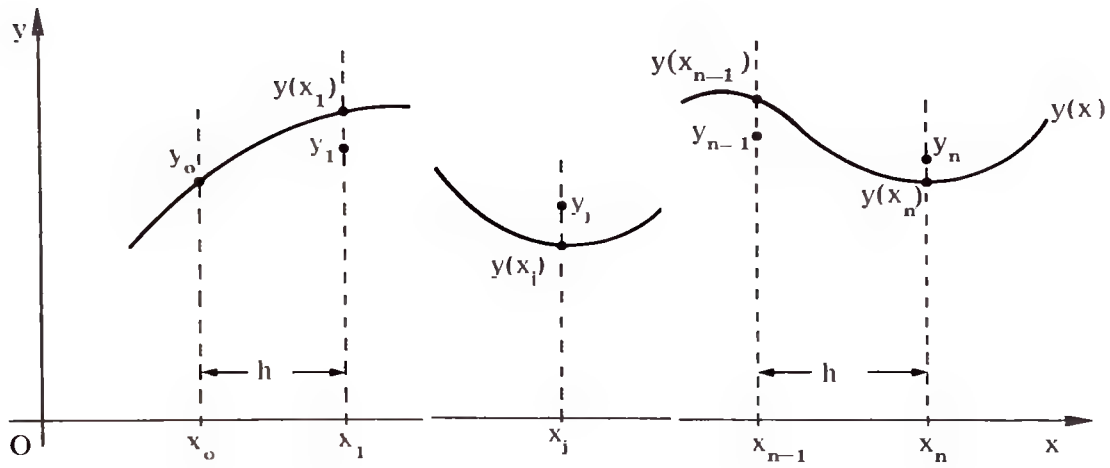
Si suponemos que la curva integral *exacta* $y(x)$ de la ecuación diferencial es la de la figura, y satisface la condición $y(x_0) = y_0$, los valores *exactos* en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ serán respectivamente $y_0, y(x_1), \ldots, y(x_j), \ldots, y(x_n)$.

Excepto en x_0, el cálculo numérico da valores aproximados en los n puntos restantes, y los llamaremos

$$y_1 \simeq y(x_1), \ldots, y_j \simeq y(x_j), \ldots, y_n \simeq y(x_n).$$

El error en x_j será $\epsilon_j = y_j - y(x_j)$, y recibe el nombre de *error de truncamiento*. Como los procesos son iterativos, y el valor aproximado y_j se basa en el anterior y_{j-1}, al error cometido en un paso se le llama *error de truncamiento local*, y depende exclusivamente

del método de cálculo que hayamos empleado, sin tener en cuenta el producido por el ordenador, que depende sólo de su grado de precisión. Este otro error, el del ordenador, recibe el nombre de *error de redondeo.*



Como la ecuación diferencial es $dy/dx = f(x, y)$, el segundo miembro es la expresión *exacta* de la derivada, que en un punto de división x_j será $f(x_j,\ y(x_j))$. Pero como $y(x_j)$ queda sustituido por el valor aproximado y_j, resulta que hay también un valor aproximado para la derivada en x_j, que será $f(x_j,\ y_j)$. Lo podemos simbolizar más brevemente por f_j.

Globalmente, hay dos grupos importantes de métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales: los de *paso sencillo,* o *monopaso,* y los de *paso múltiple,* o *multipaso.* En los métodos monopaso, el valor aproximado y_{j+1} de la curva integral en $x = x_{j+1}$ viene determinado por el valor inmediatamente anterior y_j en $x = x_j$ utilizando, claro es, el segundo miembro $f(x, y)$ de la ecuación diferencial. De una manera general, los métodos monopaso dan y_{j+1} por medio de una expresión de la forma

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j, h, f),$$

donde ϕ es una función que se determina según el método particular que se utilice. En los métodos multipaso es necesario conocer, además, otros valores de y, o bien valores de $f(x, y)$ en varios puntos; o ambas cosas a la vez.

Los métodos multipaso requieren menos operaciones que los de paso sencillo para lograr aproximaciones semejantes. Tienen el inconveniente de que al principio debemos conocer dos o más valores de y o de f, y habrá que empezar empleando un método monopaso para llegar a ellos.

Una cuestión importante en el cálculo numérico de ecuaciones es la estimación de los errores de truncamiento local y del error total. Estos errores locales se van

acumulando a medida que se opera en los subintervalos sucesivos, lo cual no quiere decir que los errores totales, acumulados cada vez, vayan aumentando necesariamente de valor. Hay metodos llamados *predictor-corrector* con los cuales se va mejorando reiteradamente la aproximación conseguida.

Un método numérico es *convergente* cuando el error ϵ_j en todo punto $x_j \in [x_0, x_n]$ tiende a cero si $h \to 0$. Intuimos que esta condición parece necesaria en los métodos de cálculo, puesto que hemos de esperar que cuanto más pequeño sea el paso más se acercará la curva integral aproximada a la solución exacta.

Entre los métodos monopaso podemos citar los que utilizan el desarrollo de Taylor y los de Runge-Kutta, y entre los de paso múltiple los de Adams y Milne.

1. METODOS MONOPASO

1.1. Aplicación del desarrollo de Taylor

Dada la ecuación $dy/dx = f(x, y)$ y la condición inicial $y(x_0) = y_0$, podemos aplicar el desarrollo de Taylor a la solución $y(x)$ de dicha ecuación en el punto x_0 con el incremento h. Tendremos:

$$y(x_0 + h) = y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) + \frac{h^2}{2!}f'(x_0, y(x_0)) + \ldots \frac{h^m}{m!}f^{(m-1}(x_0, y(x_0)) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m}(\xi, y(\xi)); \; \xi \in (x_0, x_1).$$

Como $y(x_0)$ nos viene dado por la condición inicial, y vale y_0, el desarrollo anterior queda así:

$$\begin{aligned} y(x_1) = \; & y_0 + hf(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!}f'(x_0, y_0) + \\ & + \ldots + \frac{h^m}{m!}f^{(m-1}(x_0, y_0) + \\ & + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!}f^{(m}(\xi, y(\xi)); \xi \in (x_0, x_1). \end{aligned} \tag{1.1a}$$

El factor $f(x_0, y_0)$ del término en h es el segundo miembro de la ecuación diferencial, donde las variables se han sustituido por los valores x_0, y_0 dados. El factor $f'(x_0, y_0)$ del término en h^2 se obtiene mediante la derivación de $f(x, y)$; o sea:

$$f'(x, y) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f(x, y),$$

en cuya expresión sustituiremos también x, y por x_0, y_0 respectivamente, y tendremos $f'(x_0, y_0)$. Las derivadas siguientes se obtienen derivando sucesivamente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f(x, y)$$

respecto de x, teniendo en cuenta que y es función de x. Si en las expresiones resultantes sustituimos x, y por los valores x_0, y_0 de la condición inicial conoceremos $f''(x_0, y_0), f'''(x_0, y_0), \ldots$, que son los factores de los términos de (1.1a) correspondientes a las potencias $h^3, h^4, \ldots$.

Prescindiendo en (1.1a) del resto o término complementario

$$\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m}(\xi, y(\xi)), \quad \xi \in (x_0, x_1),$$

tendremos un valor *aproximado* de $y(x_1)$, al que llamaremos y_1. Como hemos conservado las potencias de h hasta la m-ésima inclusive, diremos que el cálculo realizado es de orden h^m, y el error cometido es de orden h^{m+1}. Este error lo es de truncamiento local en el subintervalo $[x_0, x_1]$. Su acotación puede venir dada por

$$|\epsilon_{0,1}| \leqslant \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} k_1, \quad \text{si} \quad k_1 \geqslant \max_{[x_0, x_1]} \left| f^{(m}(x, y(x)) \right| .$$

El valor aproximado y_1 de la curva integral en el punto x_1 que hemos obtenido depende del número de términos de (1.1a) que hayamos conservado. La aproximación será tanto mayor cuanto mayor sea el número de esos términos, aunque, por otra parte, la derivación sucesiva de $f(x, y)$ suele complicarse extraordinariamente a medida que crece el orden.

Si aplicamos ahora el desarrollo de Taylor a $y(x)$ en x_1, será:

$$y(x_1 + h) = y(x_2) = y(x_1) + h f(x_1, y(x_1)) + \frac{h^2}{2!} f'(x_1, y(x_1)) + \ldots . \qquad (1.1b)$$

Pero $y(x_1)$ sólo lo conocemos aproximadamente por el desarrollo (1.1a), que hemos truncado en la m-ésima potencia de h, habiéndonos dado un valor $y_1 \simeq y(x_1)$. Así, pues, habrá que sustituir en (1.1b) $y(x_1)$ por y_1, y truncar también este segundo desarrollo como hicimos con el primero. Llegaremos así a un valor aproximado y_2 de $y(x_2)$. Conservando los términos hasta el que contiene h^m, como hicimos antes, una acotación del error de truncamiento local en $[x_1, x_2]$ viene dada por

$$|\epsilon_{1,2}| \leqslant \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} k_2, \qquad k_2 \geqslant \max_{[x_1, x_2]} \left| f^{(m}(x, y(x)) \right| .$$

Reiterando la aplicación del desarrollo de Taylor en los puntos $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, con el incremento h, iremos obteniendo valores aproximados $y_3, y_4, \ldots, y_n$ de la curva integral de la ecuación diferencial en $x_3, x_4, \ldots, x_n$.

Veamos un ejemplo muy sencillo que ilustra el método de Taylor, sin necesidad de que los cálculos sean complicados, a pesar de lo cual sólo los dejaremos indicados.

Se trata de aproximar la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = y - x + 1,$$

con la condición inicial $y(0) = 3$. La discretización de x podemos hacerla a la derecha de $x = 0$ con un paso $h = 0,1$, por ejemplo. El segundo miembro de la ecuación diferencial y sus derivadas sucesivas son:

$$f(x,y) = y - x + 1,\ f'(x,y) = y' - 1 = y - x,\ f''(x,y) = y - x, \ldots$$

En el punto inicial $(x_0, y_0) = (0,3)$, estas funciones toman respectivamente los valores

$$f(x_0,y_0) = 4,\ f'(x_0,y_0) = 3,\ f''(x_0,y_0) = 3,\ f'''(x_0,y_0) = 3, \ldots$$

Así, pues, el desarrollo (1.1a) será:

$$y(x_0 + h) = y(x_1) = 3 + 4h + 3\frac{h^2}{2!} + 3\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

Podemos sustituir ahora h por su valor 0,1 y operar con un cierto número de términos, truncando la serie. Salta a la vista la posibilidad de introducir e^h con sólo restar y sumar h en el segundo miembro, y nos queda:

$$y(x_1) = h + 3\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \ldots\right).$$

Lo que hay dentro del paréntesis es el desarrollo de e^h. Luego

$$y(x_1) = h + 3e^h.$$

Si observamos que en este ejemplo todas las derivadas de $f(x,y)$ son iguales a $y - x$, el término complementario –truncando el desarrollo de $y(x_1)$ en la potencia m-ésima de h– será:

$$\frac{h^{m+1}}{(m+1)!}(y(\xi) - \xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Por lo tanto, este término complementario definirá el error de truncamiento local. Tenemos así un valor aproximado $y_1 \simeq y(x_1)$.

Podemos aplicar de nuevo el desarrollo de Taylor a $y(x)$, ahora en el punto x_1 con el incremento h, pero apoyándose en el valor aproximado y_1 anterior. Será:

$$\begin{aligned} y(x_1 + h) = y(x_2) &= y_1 + hf(x_1,y_1) + \\ + \frac{h^2}{2!}f'(x_1,y_1) + \ldots &= y_1 + h(y_1 - h + 1) + \\ + \frac{h^2}{2!}(y_1 - h) + \frac{h^3}{3!}(y_1 - h) + \ldots & \end{aligned}$$

Sustituiremos h por 0,1 y operaremos truncando la serie, lo cual nos dará un valor $y_2 \simeq y(x_2)$, con el correspondiente error. Se advierte que también aquí puede ser introducido e^h con suma facilidad.

Podíamos haber obtenido $y(x_2)$ desarrollando $y(x_0 + 2h)$, y manejaríamos los valores exactos $(x_0, y_0) = (0,3)$ de la condición inicial en $f, f', f'', \ldots$ Pero el paso se habría duplicado, y sus potencias $(2h)^j$ harían aumentar considerablemente el error de truncamiento. Abandonaremos, pues, la duplicación del paso y continuaremos hallando valores aproximados de la curva integral en $x_j = x_{j-1} + h$.

La ecuación diferencial de este ejemplo es lineal de primer orden y tiene, por lo tanto, integral exacta, que es:

$$y(x) = e^x \int (1 - x)e^{-x}\,dx + ce^x = x + ce^x.$$

La condición inicial nos da $c = 3$. La curva integral que cumple tal condición es, pues, $y(x) = x + 3e^x$. Como

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(h),$$

el valor *exacto* de esta curva en x_1 será $y(x_1) = h + 3e^h$, que es el mismo que obtuvimos con la serie de Taylor. Las aproximaciones logradas aquí con el cálculo numérico son las mismas que las deducidas utilizando la solución exacta, porque en nuestro ejemplo es precisamente esta solución exacta la que nos ha permitido hacer el cálculo numérico para aproximar la curva integral.

1.2. Método de Euler y acotación en los errores

Si habiendo llegado al valor aproximado y_j calculamos y_{j+1} conservando solamente los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de $y(x_j + h)$, tendremos:

$$y(x_j) + hf(x_j, y(x_j)) \simeq y(x_j + h) = y(x_{j+1}).$$

Pero en el primer miembro hemos de sustituir $y(x_j)$, desconocido salvo para $j = 0$, por su valor aproximado y_j obtenido anteriormente. Este primer miembro resulta ser entonces otro nuevo valor aproximado de $y(x_j + h) = y(x_{j+1})$, que vamos a llamar y_{j+1}, y que ha acumulado en $[x_j, x_{j+1}]$ dos errores: el derivado de conservar sólo los dos primeros términos de la serie de Taylor y el de sustituir $y(x_j)$ por y_j. Si esto se hace en todos los subintervalos de $[x_0, x_n]$, es decir, en todos los pasos, el proceso de cálculo puede simbolizarse así:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0); & y_0 = y(x_0). \\ y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j); & j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

El error de truncamiento local será

$$|\epsilon_{j,j+1}| = \frac{h^2}{2!} |f'(\xi, y(\xi))|, \quad \xi \in (x_j, x_{j+1}).$$

Este método de Taylor que prescinde de las derivadas de $f(x, y)$ es el llamado *método de Euler*. Hay otro modificado que veremos luego.

Geométricamente, el método simple de Euler sustituye la curva integral $y(x)$ en $[x_0, x_n]$, con la condición $y(x_0) = y_0$, por una poligonal rectilínea cuyos lados están encajados en las franjas $-\infty < y < +\infty$ para cada uno de los subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n].$$

Las pendientes de los lados de la poligonal son, respectivamente,

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Esto se ve claramente en la figura 1.a, donde, en el primer subintervalo $[x_0, x_1]$, la curva $y(x)$

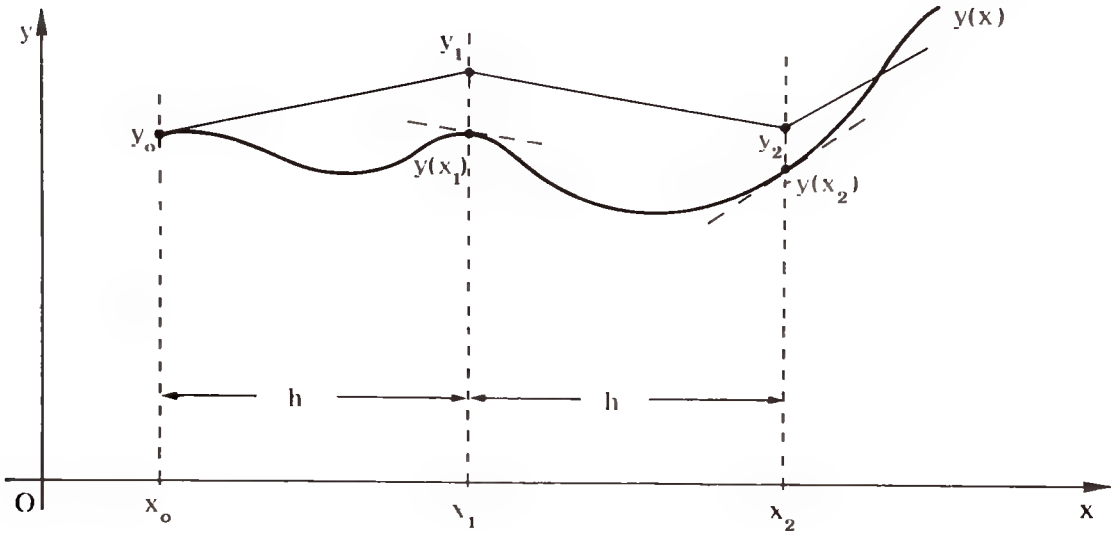


Figura 1.a

se ha sustituido por la tangente a ella en el punto (x_0, y_0), dándonos el valor aproximado y_1 en $x = x_1$. Se ve que la pendiente de esta tangente es $(y_1 - y_0)/h$, o sea, $f(x_0, y_0)$, como se deduce de la primera igualdad del simbolismo del método. En el segundo subintervalo $[x_1, x_2]$ también la curva $y(x)$ queda sustituida por la tangente a la misma en el punto $(x_1, y(x_1))$; pero como no conocemos $y(x_1)$ tendremos que trazar la paralela a dicha tangente a partir del valor aproximado y_1 obtenido antes, dándonos $y_2 \simeq y(x_2)$. La pendiente será ahora

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = f(x_1, y_1); \quad \text{etc.}$$

La acumulación de errores en el método de Euler puede ser analizada con cierta facilidad. Veámoslo.

Si y_j es un valor aproximado de $y(x_j)$ obtenido con anterioridad, el error en x_j es $\epsilon_j = y_j - y(x_j)$. Si ϵ_{j+1} es el error en x_{j+1}, será:

$$\epsilon_{j+1} - \epsilon_j = y_{j+1} - y(x_{j+1}) - [y_j - y(x_j)] = y_{j+1} - y_j - [y(x_{j+1}) - y(x_j)]. \quad (1.2a)$$

Este es el incremento $\Delta\epsilon_j$ del error; un incremento que se ha producido al pasar de x_j a x_{j+1}. Tenemos, pues, $\epsilon_{j+1} = \epsilon_j + \Delta\epsilon_j$. De la misma manera, y sucesivamente,

$$\epsilon_j = \epsilon_{j-1} + \Delta\epsilon_{j-1}, \ \epsilon_{j-1} = \epsilon_{j-2} + \Delta\epsilon_{j-2}, \ldots, \ \epsilon_1 = \epsilon_0 + \Delta\epsilon_0 = \Delta\epsilon_0.$$

Sumando estas igualdades nos queda

$$\epsilon_{j+1} = \sum_{k=0}^{j} \Delta\epsilon_k.$$

Es decir, *el error en un punto cualquiera de división* $\epsilon_{j+1} = y_{j+1} - y(x_{j+1})$ *es la suma de los errores producidos en todos los pasos,* desde x_0 a x_{j+1}. Así, pues, lo que hemos llamado simplemente error de truncamiento en un punto de división x_{j+1} es la acumulación de todos los errores de *truncamiento local* correspondientes a los subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_j, x_{j+1}].$$

Es conveniente insistir: el error de truncamiento local es el que se produce en un paso, como indica (1.2a); en cambio, el error de truncamiento *en un punto* base x_j es $\epsilon_j = y_j - y(x_j)$, y es la suma de todos los errores de truncamiento local desde x_0 a x_j.

Nos interesa mucho obtener una expresión sencilla y práctica de ϵ_j, o de su incremento, puesto que las que tenemos hasta ahora requieren conocer el valor exacto $y(x_j)$, o bien éste y el $y(x_{j+1})$ en (1.2a); valores inaccesibles, salvo el $y(x_0) = y_0$ de la condición inicial.

Empecemos utilizando la fórmula de Taylor para $y(x_j + h) = y(x_{j+1})$ de tal modo que el término complementario tenga la potencia h^2. Será:

$$y(x_{j+1}) - y(x_j) = hf(x_j, y(x_j)) + \frac{h^2}{2!} f'(\xi, y(\xi)), \quad \xi \in (x_j, x_{j+1}).$$

Pero si utilizamos el método de Euler, tendremos:

$$y_{j+1} - y_j = hf(x_j, y_j).$$

Sustituyendo ambas expresiones en el último miembro de (1.2a) resulta:

$$\epsilon_{j+1} - \epsilon_j = h[f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))] - \frac{h^2}{2!} f'(\xi, y(\xi)). \tag{1.2b}$$

Si $f(x, y)$ es de clase 1, y las derivadas parciales primeras están acotadas en una franja $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ de manera que todos los puntos de división $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pertenecen a $[a, b]$, es evidente que

$$|f'(x, y)| = \left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right| \leqslant A,$$

donde A es un número (debemos sustituir aquí dy/dx por $f(x, y)$). Por lo tanto, el factor $f'(\xi, y(\xi))$ del término complementario que figura en (1.2b) está acotado, y será

$$|f'(\xi, y(\xi))| \leqslant A.$$

Por otra parte, y aunque está implícitamente usado en la fórmula de Taylor, recordemos, sin embargo, un teorema del valor medio de las funciones de una variable: si $\varphi(x)$ tiene derivada continua en $[a, b]$, y x_m, x_n son dos valores *cualesquiera* de $x \in [a, b]$, se verifica:

$$\varphi(x_m) - \varphi(x_n) = (x_m - x_n)\varphi'(\xi), \quad \xi \in (x_m, x_n).$$

Si en la función $f(x, y)$ de la ecuación diferencial suponemos que x es constante tendremos, para cada x, una función $g(y)$, a la cual podemos aplicar el teorema del valor medio considerando pares de puntos $(x, y_m), (x, y_n)$ con un mismo x situados en la franja antes indicada; es decir,

$$x \in [a, b], \ -\infty < y_m \neq y_n < +\infty .$$

Entonces será:

$$f(x, y_m) - f(x, y_n) = (y_m - y_n)\frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y}, \ \eta \in (y_m, y_n).$$

Y por estar acotadas las derivadas parciales primeras de f, tendremos:

$$|f(x, y_m) - f(x, y_n)| = |y_m - y_n| \left| \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} \right| \leqslant B|y_m - y_n|,$$

donde B es un número.

Ahora bien, en la igualdad (1.2b) los valores y_j, $y(x_j)$ corresponden al mismo valor de $x = x_j$, y son dos valores de y, uno aproximado y otro exacto. Podemos, pues, aplicar el teorema del valor medio, con lo cual la diferencia que figura entre corchetes en el segundo miembro de (1.2b) será:

$$f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j)) = (y_j - y(x_j))\frac{\partial f(x_j, \eta)}{\partial y}, \ \eta \in (y_j, y(x_j)).$$

Y por la acotación de la derivada parcial tendremos:

$$|f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))| = |y_j - y(x_j)| \left| \frac{\partial f(x_j, \eta)}{\partial y} \right| \leqslant B|y_j - y(x_j)|.$$

Reservemos esta acotación, y también la

$$|f'(\xi, y(\xi))| \leqslant A,$$

mientras hacemos brevemente lo que sigue: Tomemos valores absolutos en la igualdad (1.2b); o sea:

$$|\epsilon_{j+1} - \epsilon_j| = \left| h[f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))] - \frac{h^2}{2} f'(\xi, y(\xi)) \right| .$$

Por la propiedad triangular sabemos que el segundo miembro es

$$\leqslant h|f(x_j, y_j) - f(x_j, y(x_j))| + \frac{h^2}{2} |f'(\xi, y(\xi))| .$$

Y ahora, mayorando las expresiones entre barras por las cotas superiores que para ellas hemos obtenido, resulta:

$$|\epsilon_{j+1} - \epsilon_j| \leqslant h B |y_j - y(x_j)| + \frac{A}{2} h^2.$$

Como $y_j - y(x_j)$ es el error ϵ_j en x_j, queda:

$$|\epsilon_{j+1} - \epsilon_j| \leqslant hB|\epsilon_j| + \frac{A}{2}h^2. \tag{1.2c}$$

Podemos aplicar de nuevo la propiedad triangular, esta vez a los errores ϵ_{j+1} y ϵ_0, intercalando ϵ_j. Tendremos:

$$|\epsilon_{j+1} - \epsilon_0| \leqslant |\epsilon_{j+1} - \epsilon_j| + |\epsilon_j - \epsilon_0|.$$

Pero $\epsilon_0 = 0$, pues suponemos que el valor inicial $y_0 = y(x_0)$ es exacto; o sea:

$$|\epsilon_{j+1}| - |\epsilon_j| \leqslant |\epsilon_{j+1} - \epsilon_j|.$$

Y teniendo en cuenta (1.2c), nos queda

$$|\epsilon_{j+1}| - |\epsilon_j| \leqslant hB|\epsilon_j| + \frac{A}{2}h^2.$$

O lo que es igual:

$$|\epsilon_{j+1}| \leqslant |\epsilon_j|(1 + Bh) + \frac{A}{2}h^2. \tag{1.2d}$$

Es una acotación recurrente que sólo requiere conocer el paso h y dos cotas superiores A y B en $[a, b]$, una de $|f'(x, y)|$ y la otra de $|\partial f/\partial y|$. Podemos, por lo tanto, aplicar (1.2d) empezando por $\epsilon_j = \epsilon_0 = 0$, y tendremos

$$|\epsilon_1| \leqslant \frac{A}{2}h^2;\ |\epsilon_2| \leqslant \frac{A}{2}h^2(2 + Bh);\ |\epsilon_3| \leqslant \frac{A}{2}h^2[(2 + Bh)(1 + Bh) + 1];\ \textit{etc.}$$

Hay una solución general que viene dada por

$$|\epsilon_j| \leqslant \frac{A}{2B}h[(1 + Bh)^j - 1]. \tag{1.2e}$$

Por el desarrollo en serie de e^{Bh} sabemos que $1 + Bh < e^{Bh}$, que sustituido en (1.2e) conduce a

$$|\epsilon_j| \leqslant \frac{A}{2B}h(e^{Bhj} - 1) \leqslant \frac{A}{2B}he^{jhB}.$$

Pero jh es la longitud l_j del intervalo $[x_0, x_j]$. Luego una acotación del error acumulado en dicho intervalo es:

$$|\epsilon_j| \leqslant \frac{A}{2B}he^{l_jB}. \tag{1.2f}$$

El error total en $[x_0, x_n]$ será

$$|\epsilon_n| \leqslant \frac{A}{2B}he^{l_nB},$$

donde $l_n = x_n - x_0$.

Ya se ve en (1.2f) que los errores ϵ_j tienden a cero cuando $h \to 0$. El método de Euler es, pues, convergente. También se ve que estos mismos errores acumulados, o errores de truncamiento ϵ_j, son de orden h; sin embargo, el error de truncamiento *local* en este método de Euler es de orden h^2. Por último, se advierte que la cota superior en (1.2f) crece exponencialmente con l_j, pudiendo llegar a no ser indicativa (aunque $|\epsilon_j|$ se mantenga *efectivamente* muy pequeño), a menos que el paso se reduzca drásticamente, lo que es antieconómico. Hemos de tantear, pues, cuidadosamente el intervalo $[x_0, x_n]$ de partición.

1.3. Método Predictor-Corrector de Euler

Al principio del apartado 1.2 hemos aludido a él como "método de Euler modificado". En realidad, es un caso particular de uno de los métodos de Runge-Kutta.

Ya vimos que en el método simple de Euler la curva integral exacta $y(x)$ de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0,$$

se sustituye por una poligonal rectilínea cuyos lados tienen las pendientes

$$f(x_0, y_0), \ldots, f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

en los subintervalos

$$[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

respectivamente.

Consideremos un subintervalo genérico $[x_j, x_{j+1}]$. En el extremo x_j contamos ya con un valor aproximado y_j de $y(x_j)$. En dicho subintervalo, la pendiente del lado de la poligonal de Euler es $f(x_j, y_j)$. Este lado "parte" de y_j, y nos da en $x = x_{j+1}$ un valor aproximado de $y(x_{j+1})$, al que no vamos a llamar y_{j+1}, sino ρ_{j+1}.

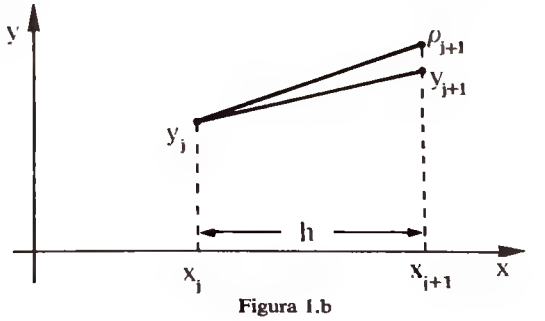


Figura 1.b

Así lo hemos dibujado en la figura 1.b como el segmento superior (por ejemplo) de los dos que aparecen en ella. La función $f(x,y)$ tiene en ambos extremos de $[x_j, x_{j+1}]$ sendos valores aproximados

$$f(x_j, y_j),\ f(x_{j+1}, \rho_{j+1})$$

a los correspondientes exactos

$$f(x_j, y(x_j)), f(x_{j+1}, y(x_{j+1})).$$

La media de dichos valores aproximados será

$$\frac{1}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \rho_{j+1})].$$

Pues bien, tracemos otro segmento rectilíneo desde el punto (x_j, y_j), cuya pendiente sea la media referida (segmento inferior de la figura 1-b). Este segmeto va a sustituir al anterior, y nos da en $x = x_{j+1}$ otro valor que mejora la aproximación del ρ_{j+1}. A este nuevo valor aproximado sí lo llamaremos y_{j+1}. Pero si deseamos reiterar el proceso reservaremos el símbolo y_{j+1} para el final. Diríamos entonces que este segundo valor aproximado es τ_{j+1}. Trazaríamos un tercer segmento cuya pendiente fuera la media de $f(x_j, y_j)$ y $f(x_{j+1}, \tau_{j+1})$; etc.

En este método, el cálculo puede ser simbolizado así:

$$\begin{cases} \rho_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \\ y_{j+1} = y_j + \dfrac{h}{2}[f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, \rho_{j+1})]. \end{cases}$$

La primera ecuación predice un valor aproximado ρ_{j+1} aplicando el método simple de Euler, con un lado de pendiente $f(x_j, y_j)$. La segunda ecuación corrige dicho valor aplicando también el método de Euler, pero con un lado cuya pendiente es la media ponderada de dos (con pesos unidad). De ahí el término "predictor-corrector".

Si esto lo hacemos en *todos* los subintervalos, resulta que ya en el primero $[x_0, x_1]$ la tangente a la curva $y(x)$ en (x_0, y_0) queda sustituida por otra recta; y los lados sucesivos de la nueva poligonal dejarán de ser paralelos a las tangentes a $y(x)$ en

$$(x_1, y(x_1)),\ (x_2, y(x_2)), \ldots.$$

El método anterior puede mejorar la aproximación si hacemos lo siguiente (figura 1.c):

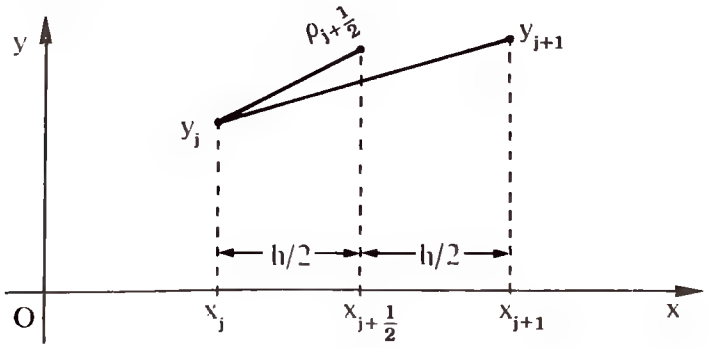


Figura 1.c

Tomemos un subintervalo genérico $[x_j, x_{j+1}]$ y dividámoslo en dos iguales,

$$[x_j, x_{j+1/2}],\ [x_{j+1/2}, x_{j+1}].$$

Contamos ya con un valor aproximado y_j en x_j. Como antes, tracemos desde el punto (x_j, y_j) una recta de pendiente $f(x_j, y_j)$, que nos da un valor $\rho_{j+\frac{1}{2}}$ *en el punto medio* $x = x_{j+1/2}$. Hallemos ahora el valor de la función f para

$$x = x_{j+1/2},\ y = \rho_{j+1/2};$$

o sea,

$$f(x_{j+1/2},\ \rho_{j+1/2}).$$

Tracemos, también desde el punto (x_j, y_j), una nueva recta cuya pendiente sea ahora el valor de f que acabamos de hallar. Esta nueva recta nos da en x_{j+1} un valor y_{j+1} con una aproximación mayor que la del método anterior.

El cálculo en este método puede simbolizarse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \rho_{j+1/2} = y_j + \dfrac{h}{2} f(x_j, y_j) \\ y_{j+1} = y_j + hf\,(x_{j+1/2},\ \rho_{j+1/2}) \end{cases}$$

La segunda ecuación equivale a

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, \rho_{j+1/2}\right),$$

puesto que

$$x_{j+1/2} = x_j + \frac{h}{2}.$$

1.4. Métodos de Runge-Kutta

Al final de la introducción de este capítulo decimos que los métodos monopaso dan y_{j+1} mediante una expresión

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j, h, f), \tag{1.4a}$$

donde ϕ es una función que viene definida por cada método empleado. Como hemos visto, en el desarrollo de Taylor es

$$\phi = f + \frac{1}{2!} hf' + \frac{1}{3!} h^2 f'' + \ldots$$

En el método de Euler simple, ϕ es la propia función f de la ecuación diferencial.

El más usado de los métodos monopaso para ecuaciones que pudiéramos llamar normales es el de Runge y Kutta, que se subdivide en otros correspondientes a las aproximaciones de diversas órdenes.

Aclaremos esto de "orden de aproximación" en un método Runge-Kutta. Si en un punto base x_j utilizamos el desarrollo de Taylor de $y(x_j + h)$ hasta el término que contiene la potencia h^m, inclusive, decimos que hemos logrado con tal desarrollo una aproximación de orden m, y que el error de truncamiento local en $[x_j, x_j + h] = [x_j, x_{j+1}]$

es de orden $m+1$. Pues bien, un método de Runge-Kutta *de orden m* alcanza una aproximación equivalente a la del desarrollo de Taylor anterior, utilizando, claro es, la función $f(x,y)$ de la ecuación diferencial, pero no sus derivadas. Es decir, el orden m de aproximación en el proceso de Runge-Kutta -donde no se deriva f- es comparable al desarrollo de Taylor, en el cual hemos de derivar f (respecto de x) $m-1$ veces; o mejor dicho, m veces, para expresar el término residual o complementario que nos da el error de truncamiento local, aunque no de una manera práctica.

La función ϕ de la fórmula (1.4a) en los métodos que ahora tratamos es siempre una media ponderada de varios valores de f en el subintervalo de integración. Realmente, es una aproximación a $f(x,y)$ en $[x_j, x_{j+1}]$. Para que ϕ se aproxime f, los métodos R-K utilizan dos o más puntos del referido subintervalo, uno de los cuales es el extremo x_j; los demás estarán expresados por $x_j+\lambda h$, $0<\lambda\leqslant 1$.

Conceptualmente, el orden de un método de Runge-Kutta no depende del número de puntos considerados en $[x_j, x_{j+1}]$, sino de la *precisión* de ese método; es decir, del orden alcanzado en el error de truncamiento. Lo que ocurre es que cuando un método R-K es de segundo orden, o sea, cuando la aproximación es equivalente a la del desarrollo de Taylor de $y(x_j+h)$ hasta el término en h^2 inclusive, son precisos dos valores de $f(x,y)$ en sendos puntos de $[x_j, x_{j+1}]$. Los métodos de órdenes 3 y 4 necesitan tres y cuatro valores de $f(x,y)$ respectivamente. Pero esta regla no es generalizable a órdenes mayores.

Vamos a exponer a continuación el método de segundo orden. Empezaremos suponiendo, como siempre, que para $x=x_j$ disponemos ya de un valor $y_j \simeq y(x_j)$ previamente calculado. Si en $f(x,y)$ hacemos $x=x_j$, $y=y_j$, la función f toma el valor $f(x_j,y_j)$, que abreviaremos con el símbolo f_j. Este valor f_j es aproximado a $f(x_j, y(x_j))$. Consideremos *otro* valor de $f(x,y)$ en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$, para lo cual podemos dar un incremento a x_j y otro a y_j; o sea, $x=x_j+\lambda h$, $y=y_j+\tau$, donde tendrá que ser $0<\lambda\leqslant 1$, y τ sin acotación. Por razones de economía, la arbitrariedad de τ se sacrifica relativamente dando a este incremento la forma $\tau=\mu h f_j$. El valor de $f(x,y)$ para

$$x=x_j+\lambda h,\ y=y_j+\mu h f_j \quad \text{es} \quad f(x_j+\lambda h, y_j+\mu h f_j),$$

que simbolizaremos con f_{j1}. Pues bien, como hemos dicho antes, la función ϕ de (1.4a) va a ser una media *ponderada* de estos dos valores de f, es decir:

$$\phi = a f_j + b f(x_j+\lambda h,\ y_j+\mu h f_j).$$

Los pesos a y b, ahora desconocidos, los obtendremos mediante un trámite relativamente corto. El simbolismo de Runge-Kutta para este caso es, por lo tanto:

$$y_{j+1} = y_j + h[a f_j + b f(x_j+\lambda h,\ y_j+\mu h f_j)]. \tag{1.4b}$$

Desarrollemos por la fórmula de Taylor de dos variables la función $f(x,y)$ en $x=x_j, y=y_j$ con los incrementos respectivos λh y $\mu h f_j$. Tendremos:

$$f(x_j+\lambda h,\ y_j+\mu h f_j) = f(x_j,y_j) + \lambda h \frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial x} + \mu h f(x_j,y_j) \frac{\partial f(x_j,y_j)}{\partial y} + \dots$$

O bien, con una notación más breve:

$$f(x_j + \lambda h,\ y_j + \mu h f_j) = f_j + \lambda h \frac{\partial f_j}{\partial x} + \mu h f_j \frac{\partial f_j}{\partial y} + 0(h^2),$$

donde sólo tenemos en cuenta los términos con las potencias de h hasta la primera inclusive. Llevemos esta expresión a la igualdad (1.4b). Después de agrupar en ella los factores que multiplican a h y h^2, resulta:

$$y_{j+1} = y_j + h(a+b)f_j + h^2 b\left(\lambda \frac{\partial f_j}{\partial x} + \mu f_j \frac{\partial f_j}{\partial y}\right) + 0(h^3). \qquad (1.4c)$$

Por otra parte, hagamos el desarrollo de Taylor de $y(x_j + h) = y(x_{j+1})$, pero sustituyendo en él $y(x_j)$ -desconocido- por y_j, con lo cual tendremos un valor $y_{j+1} \simeq y(x_j + h)$. Entonces será:

$$y_{j+1} = y_j + h f_j + \frac{h^2}{2} f'_j + T.$$

El sumando T es el término complementario, de orden 3. Pero

$$f'_j = \frac{\partial f_j}{\partial x} + f_j \frac{\partial f_j}{\partial y}.$$

Por lo tanto:

$$y_{j+1} = y_j + h f_j + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + f_j \frac{\partial f_j}{\partial y}\right) + T. \qquad (1.4d)$$

Podemos establecer que sean equivalentes los dos valores y_{j+1} correspondientes a las fórmulas (1.4c) y (1.4d). Para ello identificaremos los factores que multiplican a h y h^2 en ambos desarrollos. Resulta:

$$(a+b)f_j = f_j;\ b\left(\lambda \frac{\partial f_j}{\partial x} + \mu f_j \frac{\partial f_j}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + f_j \frac{\partial f_j}{\partial y}\right).$$

Estas dos igualdades nos dan las tres siguientes:

$$\left.\begin{aligned} a + b &= 1 \\ b\lambda = b\mu &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.4e)$$

Tenemos así tres relaciones entre los pesos a, b y los números λ, μ que determinan los incrementos λh y $\mu h f_j$ de x_j e y_j respectivamente.

Lo que en realidad hemos hecho al identificar los coeficientes de h y h^2 en los dos desarrollos y, por lo tanto, lo que hemos hecho al obtener las ecuaciones (1.4e) es obligar al algoritmo (1.4b) de Runge-Kutta a alcanzar una aproximación equivalente a la del desarrollo de Taylor (1.4d). Ahora bien, el sistema de ecuaciones (1.4e) es simplemente indeterminado, y hemos de dar un valor a una de las cuatro incógnitas; por ejemplo, a b. Entonces, para cada valor de b, hay cuatro valores $a = 1 - b$, $b = b$, $\lambda = \mu = 1/2b$,

que sustituidos en el segundo miembro de (1.4b) nos proporcionan un método particular de Runge-Kutta de segundo orden, con el cual hallamos y_{j+1} en función del inmediatamente anterior y_j, empleando la función f, pero no sus derivadas. Por lo tanto, el algoritmo (1.4b), junto con el sistema de ecuaciones (1.4e), expresa la familia de los métodos R-K de segundo orden.

Si hacemos $b = 1$, será $a = 0$, $\lambda = \mu = 1/2$. La ecuación (1.4b) queda así

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f_j\right),$$

y no es otra cosa que el método de Euler mejorado, expuesto al final del apartado 1.3. Esta última fórmula puede ser desdoblada, como hicimos entonces, considerando primero el valor incrementado $y_j + (h/2) f_j$ como una aproximación $\rho_{j+1/2}$ de $y(x)$ en el punto medio de $[x_j, x_{j+1}]$ utilizando la recta de pendiente f_j que pasa por (x_j, y_j). Después trazamos la recta de pendiente

$$f\left(x_j + \frac{h}{2}, \rho_{j+1/2}\right),$$

que pasa también por (x_j, y_j), y nos da en $x = x_{j+1}$ el valor

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, \rho_{j+1/2}\right).$$

La necesidad de un cierto grado de precisión o fiabilidad en los resultados hace que se use preferentemente los métodos R-K de cuarto orden; y que de optar por uno de segundo se acuda al método de Euler mejorado.

La deducción del proceso de cálculo de un R-K de orden 3, ó 4, es análoga a la que acabamos de ver en los de segundo orden. Ya hemos dicho que la función ϕ del algoritmo

$$y_{j+1} = y_j + h\phi(x_j, y_j, h, f)$$

es una media ponderada de los valores de $f(x, y)$ en tantos puntos de $[x_j, x_{j+1}]$ como orden tenga el método, si este orden no es superior a 4. El primer valor de f es siempre $f_j = f(x_j, y_j)$. Los demás son

$$f_{j1} = f(x_j + \lambda h, y_j + \mu h f_j),\ f_{j2} = f(x_j + \nu h, y_j + \sigma h f_{j1} + (\nu - \sigma) h f_j), \ldots$$

Un R-K de tercer orden viene dado por la fórmula general

$$y_{j+1} = y_j + h(af_j + bf_{j1} + cf_{j2}), \tag{1.4f}$$

donde los pesos a, b, c, así como los coeficientes incrementales $\lambda, \mu, \nu, \sigma$, no están determinados todavía. Ahora es cuando debemos establecer que el algoritmo (1.4f) es de tercer orden, para lo cual desarrollaremos en serie de Taylor de dos variables las expresiones de f_{j1} y f_{j2}, llevando estos desarrollos a la fórmula (1.4f), sacando factor común h, h^2, h^3, ... Por otra parte, se hace el desarrolo de Taylor de una variable de

$y(x_j+h)$. Habrá que identificar los factores que multiplican a h, h^2, h^3 en este último desarrollo con los correspondientes a dichas portencias en (1.4f), que ahora aparecerá en forma de serie de potencias de h. Obtendremos así un método R-K con aproximación de orden 3 y error de truncamiento de cuarto orden, si despreciamos los términos en h^4, h^5, ... Como consecuencia de la identificación referida llegamos a un sistema de ecuaciones en $a, b, c, \lambda, \mu, \nu, \sigma$ doblemente indeterminado, y habrá que dar valores arbitrarios a dos de estas incógnitas. Existen diversas soluciones de este sistema que proporcionan algoritmos (1.4f) empleados corrientemente.

Lo mismo se hace con los métodos de orden 4, pero identificando los factores de las potencias de h hasta la h^4 inclusive. Hay varios algoritmos de cuarto orden que son usados con frecuencia. Uno de ellos es, por ejemplo,

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\frac{1}{6}f_j + \frac{1}{3}f_{j1} + \frac{1}{3}f_{j2} + \frac{1}{6}f_{j3}\right), \tag{1.4g}$$

siendo $f_j = f(x_j, y_j)$,

$$f_{j1} = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f_j\right),$$

$$f_{j2} = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}f_{j1}\right),$$

$$f_{j3} = f(x_j + h, y_j + hf_{j2}).$$

Todos los métodos de Runge-Kutta son convergentes.

Existe una gran variedad de programas de ordenador, especialmente en FORTRAN; como, por ejemplo, el popular NUMERICAL RECIPES.

Una de las cuestiones que más interesa cuando se aplica un algoritmo R-K *es el control del paso h*; o sea, conviene disponer de algún proceso que nos permita saber si el paso debe ser acortado o si podemos continuar con él, o incluso alargarlo. Por supuesto, esta cuestión no sólo es importante en los métodos R-K, sino que lo es igualmente en cualquier otro.

Si tenemos un paso h, y estamos utilizando un R-K, podemos hacer un control del paso en un cierto subintervalo, por ejemplo en el tercero, procediendo del siguiente modo: se subdivide $[x_2, x_3]$ en dos subintervalos iguales,

$$\left[x_2, x_2 + \frac{h}{2}\right], \left[x_2 + \frac{h}{2}, x_3\right],$$

y se aplica sucesivamente el R-K en cada uno de ellos. Si el valor y_3 en $x = x_3$ obtenido de esta manera difiere muy poco del que se obtiene aplicando el R-K al subintervalo completo $[x_2, x_3]$, podemos dar por bueno el paso h en unos cuantos subintervalos más, hasta que hagamos un nuevo control. Si la diferencia entre los dos valores obtenidos en x_3 no es muy pequeña, debemos sustituir h por otro paso menor, a partir de x_2. Es una técnica de tanteo que requiere definir la pequeñez de la diferencia entre dos valores de y correspondientes a un mismo x. Hay, por lo tanto, una apreciable dosis cualitativa.

En el método de cuarto orden expresado en la fórmula (1.4g) suele emplearse el control del cociente de las diferencias: *en cada subintervalo* $[x_j, x_{j+1}]$ se calcula el cociente

$$\left|\frac{f_{j2}-f_{j1}}{f_{j1}-f_j}\right|.$$

Si éste es pequeño, puede aceptarse el paso h. Si es grande, debemos utilizar un paso menor.

Hay otros criterios para el control del paso. No conviene que el paso sea demasiado pequeño, porque implica mayor número de operaciones que inciden, evidentemente, en el error de redondeo, hasta el punto de que el aumento de este último puede llegar a ser muy superior a la disminución del error de truncamiento. Por este motivo, si un control nos da por bueno el paso h que estamos utilizando, debemos pensar que quizá nos diera también por bueno un paso mayor, cosa, por otra parte, perfectamente comprobable. Es decir, un control puede aconsejarnos conservar el paso, acortarlo, o bien alargarlo.

Hay un concepto que atañe a los métodos R-K y es útil para la elección de los mismos. Es el concepto de *estabilidad*, y no lo vamos a estudiar aquí.

Finalmente, queremos advertir que la acotación de los errores de truncamiento en los algoritmos R-K no es nada fácil.

Ejemplos:

Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y - x + 1,$$

con la condición $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Es la misma ecuación que sirvió de ejemplo en el método del desarrollo de Taylor. Aquí vamos a aplicar un Runge-Kutta de cuarto orden; concretamente, el algoritmo (1.4g). Lo volveremos a escribir:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{6}(f_j + 2f_{j1} + 2f_{j2} + f_{j3}),$$

donde $f_j = f(x_j, y_j)$

$$f_{j1} = f\left(x_j + \frac{h}{2},\ y_j + \frac{h}{2}f_j\right),$$

$$f_{j2} = f\left(x_j + \frac{h}{2},\ y_j + \frac{h}{2}f_{j1}\right),$$

$$f_{j3} = f(x_j + h,\ y_j + hf_{j2}).$$

Nuestra función $f(x, y)$ es la de la ecuación diferencial; o sea, $f(x, y) = y - x + 1$. No vamos a fijar el paso, y los cálculos vendrán, pues, en función de h.

Para obtener un valor de la curva integral $y(x)$ en $x = x_0 + h = x_1$ (al que llamaremos y_1) tendremos primero que hallar los valores f_0, f_{01}, f_{02} y f_{03}, que son:

$$f_0 = f(x_0, y_0) = y_0 - x_0 + 1 = 3 + 1 = 4;$$

$$f_{01} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2}f_0\right) = y_0 + 2h - x_0 - \frac{h}{2} + 1 = 4 + \frac{3}{2}h;$$

$$f_{02} = f\left(x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + \frac{h}{2}f_{01}\right) = y_0 + \frac{h}{2}\left(4 + \frac{3h}{2}\right) - x_0 - \frac{h}{2} + 1 = 4 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^2;$$

$$f_{03} = f(x_0 + h,\ y_0 + hf_{f2}) = y_0 + h\left(4 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^2\right) - x_0 - h + 1 = 4 + 3h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{3}{4}h^3.$$

Sustituyendo estos resultados en el algoritmo R-K que hemos elegido, queda ($j = 0$) :

$$y_1 = 3 + 4h + \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{8}h^4,$$

que son, exactamente, los cincos primeros términos del desarrollo de Taylor de $y(x_0 + h)$ para la misma ecuación diferencial y la misma condición inicial (apartado 1.1); pero allí hay que calcular las derivadas de $f(x, y)$ hasta la tercera inclusive. En este ejemplo, que es sólo ilustrativo, la función $f(x, y)$ es tan elemental que no crea ningún problema de derivación, aunque en los métodos de Runge-Kutta no es necesaria.

Si fijamos un paso $h = 0,1$ el valor $y_1 \simeq y(x_1)$, con cuatro dígitos, es $y_1 = 3,4155$. Hagamos el control de este paso en el primer intervalo de integración $[x_0, x_1]$ utilizando el cociente de las diferencias

$$C_{[x_0,x_1]} = \left|\frac{f_{02} - f_{01}}{f_{01} - f_0}\right|$$

Con este $h = 0,1$ es $f_0 = 4$, $f_{01} = 4,15$ y $f_{02} = 4,1575$. Luego $C_{[x_0,x_1]} = 0,05$ que no es muy pequeño, y nos aconseja disminuir el paso. Reduzcámoslo a la mitad, y resulta $C_{[x_0,x_1]} = 0,025$, que es también la mitad del resultado anterior, pero que, en general, no tiene por qué serlo. Tampoco es un valor muy pequeño. En el control del cociente suele admitirse milésimas dígitas o, como más, diez milésimas.

De la misma manera se calcula los valores y_2, y_3, etc.

2. METODOS MULTIPASO

2.1. Hasta aquí, hemos calculado el valor aproximado y_{j+1} de la curva integral $y(x)$ en x_{j+1} utilizando el inmediatamente anterior y_j que habíamos obtenido. Se trata ahora de establecer un algoritmo para hallar un y_{j+1} que tenga en cuenta no sólo y_j sino también y_{j-1}, y_{j-2}, $\ldots$, y_{j-p}; es decir, una fórmula que se base en unos cuantos valores sucesivos de y, previamente calculados en puntos de división consecutivos a partir de x_j inclusive pero, naturalmente, hacia atrás. Se intuye que la información dada por más de un valor de y implicará un mejor ajuste a la curva integral del problema de valores iniciales. De qué manera hemos de utilizar esa información es el fin que persiguen los métodos de paso múltiple. Hay varios, y entre ellos son frecuentemente usados el de Adams-Bashforth y los predictores-correctores de Adams-Moulton y de Milne.

Sea, como siempre, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

con la condición $y(x_0) = y_0$, y supongamos que existe una curva integral $y(x)$ única que satisface a la ecuación y a la condición que la acompaña. En general, no conocemos

$y(x)$, excepto su valor en x_0. Los valores exactos en x_1, x_2, ... -asimismo desconocidos- serán $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... La longitud de cada subintervalo

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ \ldots, [x_j, x_{j+1}] \text{ es } h.$$

Podemos expresar $y(x_{j+1})$ en función de otro valor precedente cualquiera, por ejemplo, $y(x_{j-m})$, donde x_{j-m} es también un punto de división, o punto base; es decir, $x_{j-m} \in \{x_0, x_1, \ldots, x_j\}$. Dicha expresión puede obtenerse integrando

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

entre los límites x_{j-m} y x_{j+1}. Será:

$$y(x_{j+1}) - y(x_{j-m}) = \int_{x_{j-m}}^{x_{j+1}} f(x, y(x))\, dx. \tag{2.1a}$$

Ahora bien, bajo el signo integral desconocemos $y(x)$ y, por lo tanto, $f(x, y(x))$. Vamos a suponer, sin embargo, que hemos ido calculando de alguna manera *valores aproximados* de la curva integral en x_1, $x_2, \ldots, x_j$ a partir de $y(x_0) = y_0$; es decir, que conocemos

$$y_1 \simeq y(x_1),\ y_2 \simeq y(x_2), \ldots, y_j \simeq y(x_j).$$

Entonces, también conocemos los valores

$$f_1 = f(x_1, y_1),\ f_2 = f(x_2, y_2), \ldots, f_j = f(x_j, y_j).$$

Pues bien, en la fórmula (2.1a) sustituyamos $f(x, y(x))$ por un polinomio interpolador $P(x)$ que pase por los $p + 1$ puntos siguientes:

$$(x_j, f_j),\ (x_{j-1}, f_{j-1}),\ (x_{j-2}, f_{j-2}), \ldots, (x_{j-p}, f_{j-p}).$$

Para ello utilizaremos el polinomio (2.3a), calculado detalladamente en el apéndice de este libro, apartados 2.2 y 2.3. Allí, los $p + 1$ puntos por los cuales pasa el polinomio son

$$(x_j, y_j),\ (x_{j-1}, y_{j-1}),\ (x_{j-2}, y_{j-2}), \ldots, (x_{j-p}, y_{j-p}),$$

y los coeficientes a_1, $a_2, \ldots, a_p$ de $P(x)$ vienen en función de las diferencias finitas regresivas de y_j. Como los puntos considerados ahora son de la forma (x_k, f_k), las diferencias regresivas deberán ser aplicadas a $f_j = f(x_j, y_j)$. El polinomio (2.3a) del apéndice será, pues, en nuestro caso:

$$P(x) = f_j + \frac{\nabla f_j}{h}(x - x_j) + \frac{\nabla^2 f_j}{2!\, h^2}(x - x_j)(x - x_{j-1}) +$$
$$+ \ldots + \frac{\nabla^p f_j}{p!\, h^p}(x - x_j)(x - x_{j-1}) \ldots (x - x_{j-p+1}).$$

Es de grado p y pasa por los $p + 1$ puntos (x_k, f_k) consignados antes.

Es más sencillo manejar este polinomio con el cambio de variable $x = x_j + \theta h$, cosa que también hacemos en el apéndice y nos conduce a la expresión (2.3b) allí deducida. Pero aquí debemos sustituir y_j por f_j, y tendremos:

$$P(x_j + \theta h) = f_j + \theta \nabla f_j + \theta(\theta+1)\frac{\nabla^2 f_j}{2!} + \dots + \theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta-p+1)\frac{\nabla^p f_j}{p!}.$$

Este segundo miembro es el que va a reemplazar a $f(x, y(x))$ en la integral de la fórmula (2.1a), modificando los límites de integración a causa del cambio de variable $x = x_j + \theta h$. Estos límites son ahora $-m$ y 1. Por otra parte, $dx = h d\theta$. La fórmula (2.1a), después de hacer que el primer miembro $y(x_{j+1}) - y(x_{j-m})$ sea $y_{j+1} - y_{j-m}$, como habíamos acordado, queda así:

$$y_{j+1} = y_{j-m} + h\int_{-m}^{1}\left[f_j + \theta \nabla f_j + \theta(\theta+1)\frac{\nabla^2 f_j}{2!} + \dots + \theta(\theta+1)(\theta+2)\dots(\theta+p-1)\frac{\nabla^p f_j}{p!}\right] d\theta. \qquad (2.1b)$$

Una primitiva inmediata del integrando es

$$\theta f_j + \frac{\theta^2}{2}\nabla f_j + \left(\frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^2}{2}\right)\frac{\nabla^2 f_j}{2!} + \left(\frac{\theta^4}{4} + \theta^3 + \theta^2\right)\frac{\nabla^3 f_j}{3!} + \dots,$$

a la cual se le aplicará la regla de Barrow en los límites $-m$ y 1. Entonces, el algoritmo (2.1b) tiene la expresión:

$$y_{j+1} = y_{j-m} + h\left[(m+1)f_j + \frac{1-m^2}{2}\nabla f_j + \frac{5-3m^2+2m^3}{6}\cdot\frac{\nabla^2 f_j}{2!} + \frac{9-4m^2+4m^3-m^4}{4}\cdot\frac{\nabla^3 f_j}{3!} + \dots\right] \qquad (2.1c)$$

2.2. Método de Adams-Bashforth

Todos los métodos multipaso ordinarios emplean este algoritmo (2.1c), que permite obtener el valor aproximado y_{j+1} en función de uno precedente y de las diferencias regresivas de f_j hasta la de orden p inclusive. Estas diferencias requieren conocer f_j, $f_{j-1}, \dots, f_{j-p}$, lo cual obliga a conocer a su vez $p+1$ valores aproximados y_j, $y_{j-1}, \dots, y_{j-p}$ en los puntos de división x_j, $x_{j-1}, \dots, x_{j-p}$ respectivamente. Por lo tanto, el algoritmo (2.1c) sólo puede emplearse a partir de x_p; es decir, para empezar, debemos haber hallado antes p valores aproximados y_1, $y_2, \dots, y_p$ (el y_0 lo conocemos por la condición inicial) en los que tiene que apoyarse el cálculo de y_{p+1}. Estos primeros p valores $y_1, \dots, y_p$ pueden ser obtenidos con un método monopaso, preferentemente uno de Runge-Kutta.

Los diferentes métodos de paso múltiple que utilizan el algoritmo (2.1c) se distinguen unos de otros en el intervalo empleado en la integración del polinomio $P(x)$ -o bien $P(x_j+\theta h)$- y/o en el número de puntos (x_k, f_k) por donde ha de pasar dicho polinomio; es decir, en el valor de m y/o en el grado p de $P(x_j+\theta h)$. En la fórmula (2.1c), el grado de P se reconoce por el orden de la diferencia regresiva más alta.

El método de Adams-Bashforth consiste en aplicar (2.1c) haciendo $m = 0$ y $p = 3$ (diferencias regresivas hasta la de orden 3 inclusive). El intervalo de integración de $P(x)$ es, pues, $[x_j, x_{j+1}]$. El algoritmo (2.1c) queda así:

$$y_{j+1} = y_j + h\left(f_j + \frac{1}{2}\nabla f_j + \frac{5}{12}\nabla^2 f_j + \frac{3}{8}\nabla^3 f_j\right).$$

Si desarrollamos las diferencias regresivas resulta:

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(55f_j - 59f_{j-1} + 37f_{j-2} - 9f_{j-3}), \qquad (2.2a)$$

que es la forma más frecuente de usar el método, el cual ha consistido -como sabemos por la deducción de (2.1c)- en formular un polinomio de tercer grado que pasa por los puntos

$$(x_j, f_j),\ (x_{j-1}, f_{j-1}),\ (x_{j-2}, f_{j-2}),\ (x_{j-3}, f_{j-3})$$

e integrarlo entre x_j y x_{j+1}.

Para aplicar este método es necesario conocer al principio los valores

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 \simeq y(x_1),\ y_2 \simeq y(x_2),\ y_3 \simeq y(x_3),$$

que pueden ser calculados (los tres últimos) con un método de Runge-Kutta de cuarto orden. El error de truncamiento local en (2.2a) es de orden 5 (proporcional a h^5), lo mismo que un R-K de cuarto orden.

2.3. Método Predictor-Corrector de Adams-Moulton

Emplea dos fórmulas. Una es la misma (2.2a) del método de Adams-Bashforth. La otra es

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{24}(9f_{j+1} + 19f_j - 5f_{j-1} + f_{j-2}). \qquad (2.3a)$$

Aquí observamos que figura el valor $f_{j+1} = f(x_{j+1}, y_{j+1})$, y habrá que conocer y_{j+1}. Procederemos del modo siguiente: Se calcula un valor aproximado y_{j+1} utilizando la fórmula (2.2a) de Adams-Bashforth. Con dicho valor hallamos $f_{j+1} = f(x_{j+1}, y_{j+1})$, y lo sustituimos en (2.3a), cuya fórmula nos da otro valor y_{j+1} que mejora la aproximación del que hemos hallado antes. Tenemos, pues, un algoritmo (2.2a) que nos da un primer valor y_{j+1}; y tenemos también otro algoritmo (2.3a) que lo corrige. El conjunto de ambos constituye un método predictor-corrector.

Ahora bien, si la diferencia entre los dos valores y_{j+1} obtenidos por este procedimiento es muy pequeña, podemos aceptar el segundo de ellos dado por la fórmula

correctora (2.3a). Pero si la diferencia no es pequeña debemos repetir el cálculo con (2.3a), sustituyendo el segundo y_{j+1} en $f_{j+1} = f(x_{j+1}, y_{j+1})$ y operando de nuevo con la fórmula correctora, que nos dara un tercer valor y_{j+1}. Este proceso debe repetirse hasta que la diferencia entre los dos últimos y_{j+1} sea lo suficientemente pequeña.

Naturalmente, para emplear este método hay que arrancar también de los valores y_1, y_2, y_3 (el y_0 nos viene dado).

El orden del error de truncamiento local de la fórmula correctora (2.3a) es también proporcional a h^5.

2.4. Métodos de Milne

Son también predictores-correctores. Uno es de cuarto orden y el otro de sexto. Las dos fórmulas de cuarto orden son:

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_{j-3} + \dfrac{4h}{3}(2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}) \\ y_{j+1} = y_{j-1} + \dfrac{h}{3}(f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1}). \end{cases}$$

La última fórmula es la correctora. Obsérvese que los intervalos de integración son $[x_{j-3}, x_{j+1}]$ en el primer algoritmo, y $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ en el segundo. El orden del error de truncamiento local en ambos algoritmos es proporcional a h^5.

Las dos fórmulas de sexto orden de Milne son:

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_{j-5} + \dfrac{3h}{10}(11f_j - 14f_{j-1} + 26f_{j-2} - 14f_{j-3} + 11f_{j-4}) \\ y_{j+1} = y_{j-3} + \dfrac{2h}{45}(7f_{j+1} + 32f_j + 12f_{j-1} + 32f_{j-2} + 7f_{j-3}). \end{cases}$$

También aquí los intervalos de integración abarcan más de un subintervalo base. Los errores de truncamiento local son del orden de h^7.

Para obtener y_{j+1} con una aproximación satisfactoria se opera lo mismo que con el método de Adams-Moulton.

BIBLIOGRAFIA

BOYCE, W.E.-DIPRIMA, R.C.: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 3ª edición, John Wiley & Sons. Nueva York, 1979.

CARNAHAN, B.-LUTHER, H.A.-WILKES, J.O.: *Applied Numerical Methods*. Ed. John Wiley & Sons. Nueva York, 1978.

HENRICI, P.: *Elements of Numerical Analysis*. Ed. Wiley. Nueva York, 1964.

NOUGIER, J.P.: *Methodes de calcul numerique*. Ed. Masson. París, 1989.

APENDICE

1. DIFERENCIAS FINITAS

1.1. Definiciones

Sea $y = f(x)$ una función cuya variable independiente x va a tomar sólo valores reales equidistantes, en los cuales f está definida. Si h es la distancia entre cada dos puntos consecutivos, y x_0 uno de ellos, podemos escribir, a ambos lados de $f(x_0) = y_0$:

$$\ldots, y_{-2} = f(x_0 - 2h),\ y_{-1} = f(x_0 - h),\ y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_0 + h),\ y_2 = f(x_0 + 2h), \ldots$$

El conjunto de valores de x donde $f(x)$ está definida puede ser finito. Supongamos que el número de esos valores es $m + 1$, y h la distancia entre cada dos consecutivos. Entonces llamaremos x_0 al menor de todos ellos (positivo, nulo o negativo), y dichos valores serán

$$x_j = x_0 + jh, \text{ con } h > 0 \text{ y} j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Los correspondientes valores de $f(x) = y$ son:

$$\begin{aligned} &y_0 = f(x_0), \\ &y_1 = f(x_1) = f(x_0 + h), \\ &y_2 = f(x_2) = f(x_0 + 2h), \ldots, y_m = f(x_m) = f(x_0 + mh). \end{aligned}$$

La distancia constante h recibe el nombre de *paso*.

A las diferencias entre dos valores de y correspondientes a dos valores consecutivos de x se les llama *diferencias finitas de primer orden*, o *diferencias primeras*. Las escribiremos así:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{m-1} = y_m - y_{m-1}.$$

Estas diferencias son *progresivas*, porque el subíndice de los minuendos es una unidad mayor que el de los valores afectados por las propias diferencias. Las diferencias *regresivas* tienen el símbolo ∇ (que nada tiene que ver con el operador diferencial vectorial de Hamilton), y son:

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0,\ \nabla y_2 = y_2 - y_1, \ldots, \nabla y_m = y_m - y_{m-1}.$$

Por lo tanto, $\Delta y_k = \nabla y_{k+1}$.

Si restamos dos diferencias primeras progresivas y consecutivas obtenemos una diferencia de segundo orden, o *diferencia segunda*. Las diferencias segundas progresivas tienen el símbolo Δ^2, y son:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots, \Delta^2 y_{m-2} = \Delta y_{m-1} - \Delta y_{m-2}.$$

Las diferencias segundas regresivas serán:

$$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1,\ \nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2, \ldots, \nabla^2 y_m = \nabla y_m - \nabla y_{m-1}.$$

Recordando la relación $\Delta y_k = \nabla y_{k+1}$ vista antes, tendremos:

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \nabla y_{k+2} - \nabla y_{k+1} = \nabla^2 y_{k+2}.$$

De manera análoga se define las diferencias terceras, cuartas, etc., progresivas y regresivas. Como hemos supuesto que hay $m+1$ puntos equidistantes (valores de x) en los cuales está definida la función y, habrá m diferencias primeras, tanto progresivas como regresivas; $m-1$ diferencias segundas, $m-2$ terceras,..., 2 de orden $m-1$ y 1 de orden m.

Acabamos de ver que

$$\Delta y_k = \nabla y_{k+1},\ \Delta^2 y_k = \nabla^2 y_{k+2}, \ldots.$$

De un modo general es $\Delta^n y_k = \nabla^n y_{k+n}$.

Si colocamos los valores de x en una columna y los de y en otra contigua, las diferencias se obtienen cómodamente dispuestas en columnas sucesivas, como se indica a continuación:

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	...	Δ^{m-1}	Δ^m
x_0	y_0						
		Δy_0					
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$				
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$			
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$				
		Δy_2				$\Delta^{m-1} y_0$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^m y_0$
		Δy_{m-3}				$\Delta^{m-1} y_1$	
x_{m-2}	y_{m-2}		$\Delta^2 y_{m-3}$				
		Δy_{m-2}		$\Delta^3 y_{m-3}$			
x_{m-1}	y_{m-1}		$\Delta^2 y_{m-2}$				
		Δy_{m-1}					
x_m	y_m						

Un cuadro análogo puede hacerse con las diferencias regresivas.

Si desarrollamos las sucesivas diferencias progresivas de $f(x_0) = y_0$, desde la primera a la emésima, tenemos:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0;$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0;$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta y_2 - \Delta y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^m y_0 = y_m - \binom{m}{1} y_{m-1} + \binom{m}{2} y_{m-2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} y_0.$$

Como hay m relaciones lineales entre los $m + 1$ valores de y, podemos expresar $y_1, y_2, \ldots, y_m$ en función de y_0 y de sus diferencias sucesivas. De las igualdades anteriores primera, segunda, tercera, etc., obtenemos respectivamente:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0;$$
$$y_2 = 2y_1 - y_0 + \Delta^2 y_0 = 2(y_0 + \Delta y_0) - y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0;$$
$$y_3 = 3y_2 - 3y_1 + y_0 + \Delta^3 y_0 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0; \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Y por inducción se llega a

$$y_m = y_0 + \binom{m}{1} \Delta y_0 + \binom{m}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{m}{m} \Delta^m y_0. \qquad (1.1a)$$

Si intentamos hacer lo mismo con las diferencias regresivas, hemos de tener en cuenta que no existe ∇y_0, puesto que el primer valor de x donde está definida $f(x) = y$ es, por hipótesis, x_0. Entonces, en vez de aplicar ∇, $\nabla^2, \ldots$ a un valor intermedio cualquiera de $f(x)$, podemos escoger el último, $f(x_m) = y_m$, que nos permite obtener m diferencias regresivas. Tendremos:

$$\nabla y_m = y_m - y_{m-1}.$$
$$\nabla^2 y_m = \nabla y_m - \nabla y_{m-1} = y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2};$$
$$\nabla^3 y_m = \nabla^2 y_m - \nabla^2 y_{m-1} = y_m - 2y_{m-1} + y_{m-2} -$$
$$- y_{m-1} + 2y_{m-2} - y_{m-3} = y_m - 3y_{m-1} + 3y_{m-2} - y_{m-3}; \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\nabla^m y_m = \Delta^m y_0 = y_m - \binom{m}{1} y_{m-1} + \binom{m}{2} y_{m-2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} y_0.$$

De manera análoga a como lo hicimos antes, podemos despejar ahora de estas m igualdades los m valores $y_{m-1}, y_{m-2}, \ldots, y_1, y_0$, que vendrán en función de y_m y de sus diferencias regresivas. Así, de las relaciones primera, segunda, etc., tenemos sucesivamente:

$$y_{m-1} = y_m - \nabla y_m;$$
$$y_{m-2} = 2y_{m-1} - y_m + \nabla^2 y_m = y_m - 2\nabla y_m + \nabla^2 y_m;$$
$$y_{m-3} = 3y_{m-2} - 3y_{m-1} + y_m - \nabla^3 y_m =$$
$$= y_m - \binom{3}{1} \nabla y_m + \binom{3}{2} \nabla^2 y_m - \binom{3}{3} \nabla^3 y_m; \ldots$$

Por inducción se llega a

$$y_0 = y_m - \binom{m}{1} \nabla y_m + \binom{m}{2} \nabla^2 y_m -$$

$$- \binom{m}{3} \nabla^3 y_m + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} \nabla^m y_m. \qquad (1.1b)$$

Por lo tanto, si conocemos $m+1$ valores $y_0, y_1, \ldots, y_m$ de una función $y = f(x)$, correspondientes a $m+1$ valores equidistantes de la variable independiente, podemos expresar uno cualquiera de ellos y_k en función de otro anterior y_{k-p} y de sus diferencias progresivas; o bien, en función de otro posterior y_{k+q} y de sus diferencias regresivas. Para este fin, las fórmulas generales (1.1a) y (1.1b) son particularmente útiles, porque nos dan respectivamente y_m en función de y_0 y sus m diferencias progresivas, e y_0 en función de y_m y sus m diferencias regresivas.

1.2. Factoriales o potencias generalizadas

Consideremos una variable x. Si le vamos restando sucesivamente las constantes $c, 2c, 3c, \ldots, (n-1)c$, donde c es un número real cualquiera, nos quedará

$$x - c,\ x - 2c, \ldots, x - (n-1)c.$$

Pues bien, al producto

$$x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-1)c)$$

se le llama *factorial de x de orden n*, o también *potencia enésima generalizada de x*. Se le representa con el símbolo $x^{(n)}$, olvidándonos de que el superíndice pueda indicar una derivada. Convendremos también en hacer $x^{(0)} = 1$. Así, pues, los factoriales sucesivos de x hasta el de orden n, referidos a una constante c, son:

$$x^{(0)} = 1;\ x^{(1)} = x;\ x^{(2)} = x(x-c);\ x^{(3)} = x(x-c)(x-2c); \ldots$$
$$\ldots; x^{(n)} = x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-1)c).$$

Si la constante c es cero, estas potencias generalizadas coinciden con las ordinarias ($x^{(n)} = x^n$).

Vamos a hallar las diferencias progresivas primera, segunda,... de $x^{(n)}$, cosa que nos será útil en la interpolación.

La diferencia primera es

$$\Delta x^{(n)} = (x+c)^{(n)} - x^{(n)} = (x+c)x(x-c)(x-2c)\ldots$$
$$\ldots(x-(n-2)c) - x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-1)c) =$$
$$= x(x-c)(x-2c)\ldots(x-(n-2)c)(x+c-x+(n-1)c).$$

O sea:

$$\Delta x^{(n)} = n\,c\,x^{(n-1)}.$$

Dividiendo por $n!$ y poniendo $\Delta x^{(n)} = (x+c)^{(n)} - x^{(n)}$, nos queda:

$$\frac{(x+c)^{(n)}}{n!} = \frac{x^{(n)}}{n!} + \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}c,$$

fórmula recurrente que permite obtener el factorial de orden n de $x+c$ conociendo los de órdenes n y $n-1$ de x. Se puede tabular.

La diferencia segunda de $x^{(n)}$ sale inmediatamente de la expresión de la primera, pues

$$\Delta^2 x^{(n)} = \Delta(n\,c\,x^{(n-1)}) = n\,c\Delta x^{(n-1)} = n(n-1)c^2\,x^{(n-2)}.$$

Del mismo modo,

$$\Delta^3 x^{(n)} = n(n-1)c^2\Delta x^{(n-2)} = n(n-1)(n-2)c^3\,x^{(n-3)},$$

etcétera. La diferencia enésima es $\Delta^n x^{(n)} = n!\,c^n$. Las siguientes son nulas.

Si la variable viene dada en la forma $x - x_0$, por ejemplo, es claro que sus diferencias progresivas se obtendrán de las anteriores sustituyendo x por $x - x_0$.

Las diferencias regresivas de $x^{(n)}$ pueden ser formuladas rápidamente recordando que

$$\nabla x^{(n)} = \Delta(x-c)^{(n)},\ \nabla^2 x^{(n)} = \Delta^2(x-2c)^{(n)},\ \text{etc.}$$

Vemos entonces que en las expresiones de estas diferencias los factoriales tienen la base variable. Para que las diferencias regresivas vengan dadas en función de los sucesivos factoriales de x, dichas diferencias tienen que ser:

$$\nabla(x+c)^{(n)} = \Delta x^{(n)},\ \nabla^2(x+2c)^{(n)} = \Delta^2 x^{(n)}, \ldots$$

1.3. Algunas propiedades

El cálculo de diferencias es útil en diversas cuestiones, entre ellas la interpolación. Conviene tener en cuenta ciertas propiedades que pueden ser aprovechadas en el referido cálculo, algunas de las cuales vamos a exponer brevemente.

De ahora en adelante consideraremos siempre valores $x = x_0, x_1, x_2, \ldots$ equidistantes, de paso $h > 0$, y supondremos que hay una función $y = f(x)$ definida en ellos.

a) En primer lugar, el símbolo Δ, considerado como operador, posee las propiedades lineales; es decir:

$$\Delta(f(x)+g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x),$$
$$\Delta(c\psi(x)) = c\Delta f(x),$$

bien entendido que $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$. Es claro que la diferencia de una constante es cero ($\Delta c = 0$). Por lo tanto, la igualdad $\Delta f(x) = \Delta g(x)$ implica $f(x) = g(x) + c$.

b) Consideremos la exponencial $b^{f(x)}$. Podemos expresar su diferencia primera progresiva en función de $\Delta f(x)$ del siguiente modo:

$$\Delta b^{f(x)} = b^{f(x+h)} - b^{f(x)} = b^{f(x+h)-f(x)+f(x)} - b^{f(x)} = b^{f(x)}(b^{\Delta f(x)} - 1).$$

c) Las diferencias progresivas de la enésima potencia ordinaria de x son:

$$\Delta x^n = (x+h)^n - x^n = \binom{n}{1} hx^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} h^n;$$

$$\Delta^2 x^n = \Delta(x+h)^n - \Delta x^n = (x+2h)^n - 2(x+h)^n + x^n =$$

$$= 2\binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + 2(2^2-1)\binom{n}{3} h^3 x^{n-3} + \ldots + 2(2^{n-1}-1)\binom{n}{n} h^n;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n x^n = n! h^n.$$

Las de orden mayor que n son nulas.

d) La diferencia primera de un producto de dos funciones es:

$$\begin{aligned}\Delta(f(x)g(x)) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)[g(x+h) - g(x) + g(x)] - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)\Delta g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) = \\ &= f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).\end{aligned}$$

Son intercambiables f y g.

La del cociente se halla de manera análoga, y resulta:

$$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}.$$

e) Introduzcamos ahora un nuevo operador ζ, que llamaremos *operador traslación*, o también *operador siguiente*, cuyo significado es $\zeta f(x) = f(x+h)$. La relación entre los operadores Δ y ζ se obtiene de la propia definición de Δ:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \zeta f(x) - f(x).$$

Si consideramos a Δ y ζ como factores simbólicos, el último miembro puede escribirse $(\zeta - 1)f(x)$. Es decir, $\Delta f(x) = (\zeta - 1)f(x)$. Luego los operadores Δ y $\zeta - 1$ son equivalentes. Por lo tanto, es $\zeta = \Delta + 1$.

Las traslaciones de órdenes 2, 3,.... serán tales que

$$\zeta^2 f(x) = f(x+2h),\ \zeta^3 f(x) = f(x+3h), \ldots$$

Convendremos en admitir que $\zeta^0 = 1$ y $\Delta^0 = 1$. Entonces podremos expresar el operador ζ^n, $n \in \mathbb{N}$, en función de los operadores Δ de órdenes $n, n-1, \ldots, 1, 0$. Tendremos:

$$\zeta^n = (\Delta+1)^n = \Delta^n + \binom{n}{1}\Delta^{n-1} + \binom{n}{2}\Delta^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\Delta + \binom{n}{n}\Delta^0,$$

que es un operador polinómico en Δ. Si hacemos actuar a ζ^n sobre $f(x)$ resulta (empezando el desarrollo por el final):

$$\zeta^n f(x) = f(x+nh) = f(x) + \binom{n}{1}\Delta f(x) + \binom{n}{2}\Delta^2 f(x) + \dots$$
$$\dots + \binom{n}{n-1}\Delta^{n-1} f(x) + \binom{n}{n}\Delta^n f(x),$$

que no es otra cosa que la fórmula (1.1a).

2. INTERPOLACION

2.1. Polinomio interpolador con diferencias progresivas

Sea $f(x)$ una función que toma los valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ en los $n+1$ puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivamente; es decir:

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Tratemos de encontrar un polinomio $P(x)$ de grado no mayor que n tal que para $x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ tome respectivamente los mismos valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ que la función $f(x)$. Si esta función es suficientemente regular, el polinomio $P(x)$ que buscamos puede servirnos para obtener valores aproximados de $f(x)$ en otros puntos distintos de los x_j, $j = 0, 1, 2, \dots, n$. La utilización de $P(x)$ para hallar valores aproximados de $f(x)$ en puntos del intervalo $[x_0, x_n]$ distintos de los x_j es lo que constituye la *interpolación*. A $P(x)$ se le llama *polinomio interpolador*.

Vamos a suponer que los $n+1$ valores x_j en los cuales está definida $f(x)$ son equidistantes. Es decir:

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh,$$

donde h es el paso. El polinomio $P(x)$ que queremos encontrar ha de tomar en esos puntos los mismos valores $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ que $f(x)$. Podemos escribir $P(x)$ en la forma siguiente:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}), \qquad (2.1a)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son coeficientes que debemos determinar. Con el simbolismo de los factoriales, este polinomio será:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{(1)} + a_2(x - x_0)^{(2)} + \dots + a_n(x - x_0)^{(n)}. \qquad (2.1b)$$

Si aquí hacemos $x = x_0$, nos queda $P(x_0) = a_0$; pero $P(x_0)$ ha de ser el valor y_0 que toma la función $f(x)$ en x_0. Por lo tanto, es $a_0 = y_0$. Para hallar $a_1, a_2, \ldots, a_n$, empezaremos escribiendo las diferencias progresivas primera, segunda,... enésima de $P(x)$. La diferencia primera es:

$$\Delta P(x) = a_1 \Delta(x - x_0)^{(1)} + a_2 \Delta(x - x_0)^{(2)} + \ldots + a_n \Delta(x - x_0)^{(n)},$$

y aplicando lo expuesto en el apartado 1.2, tendremos:

$$\Delta P(x) = a_1 h + 2a_2 h(x - x_0)^{(1)} + 3a_3 h(x - x_0)^{(2)} + \ldots + n a_n h(x - x_0)^{(n-1)}.$$

Poniendo aquí $x = x_0$ nos queda $\Delta P(x) = a_1 h$; y como ha de ser $P(x_0) = y_0$, resulta:

$$a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{\Delta y_0}{1!h}.$$

De la misma manera se ve que la diferencia segunda de $P(x)$ es:

$$\Delta^2 P(x) = 2h^2 a_2 + 2 \cdot 3 h^2 a_3 (x - x_0)^{(1)} + \ldots + (n-1) n h^2 a_n (x - x_0)^{(n-2)}.$$

Si aquí hacemos $x = x_0$, tendremos $\Delta^2 y_0 = 2h^2 a_2$, de donde

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}.$$

De modo análogo se calcula las diferencias tercera, cuarta,... de $P(x)$, de las cuales deduciremos los coeficientes restantes. El último, a_n, sale de la expresión

$$\Delta^n P(x_0) = \Delta^n y_0 = n! h^n a_n \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}.$$

Llevando a la expresión de $P(x)$ los valores obtenidos para los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ tendremos finalmente:

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0)^{(1)} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)^{(2)} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)^{(n)}. \quad (2.1c)$$

Este es el polinomio interpolador con diferencias progresivas, o la fórmula de interpolación de Newton-Gregory, que utilizaremos en algunos problemas o ejercicios.

Naturalmente, el paso h y el cálculo que hemos hecho de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aseguran que (2.1c) pasa por los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. *A posteriori*, esto puede ser comprobado brevemente para cualquier punto de división $x_k \neq x_n$. Para $x = x_n$ no se anula ningún binomio de los factoriales; pero teniendo en cuenta que un factorial cualquiera de $x_n - x_0$ de orden genérico k es

$$\begin{aligned} (x_n - x_0)^{(k)} &= (x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{k-1}) = \\ &= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\, h^k, \end{aligned}$$

resulta ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$P(x_n) = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 =$$

$$= y_0 + \binom{n}{1}\Delta y_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{n}{n}\Delta^n y_0,$$

que es la fórmula (1.1a) y, por lo tanto, $P(x_n) = y_n$.

2.2. Polinomio interpolador con diferencias regresivas

Igual que en el apartado anterior, vamos a determinar un polinomio $P(x)$ de grado n que adquiera los mismos valores $y_0, y_1, \ldots, y_n$ que toma una función $f(x)$ en los puntos

$$x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_0 + nh,$$

y servirá para aproximar dicha función en los demás puntos del intervalo $[x_0, x_n]$. Por supuesto, es $h > 0$.

Pongamos el polinomio en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$\ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1), \qquad (2.2a)$$

que difiere de la anterior (2.1a) en que el binomio de partida es $x - x_n$ en vez de $x - x_0$. Calcularemos los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ utilizando las diferencias regresivas primera, segunda,... de $P(x)$. El coeficiente a_0 sale inmediatamente de (2.2a) haciendo $x = x_n$, y nos queda $a_0 = P(x_n) = y_n$. Veamos los demás.

La diferencia primera de $P(x)$ es

$$\nabla P(x) = P(x) - P(x - h).$$

Habrá que formular $P(x - h)$ sustituyendo en (2.2a) x por $x - h$. Para cualquier binomio que no sea $x - x_n$; por ejemplo, para $x - x_5$, esta sustitución conduce a

$$x - x_5 - h = x - (x_5 + h) = x - x_6.$$

Pero si se trata de $x - x_n$, como x_n es el último punto de división, y a su derecha no se conoce, por hipótesis, ningún valor de la función $f(x)$, tendremos que dejar indicada la sustitución de x por $x - h$. Este primer factor será, pues, $x - x_n - h$. Tengamos esto en cuenta para lo que sigue.

Con el fin de ahorrar tiempo, consideremos un término genérico de (2.2a), al que llamaremos $t_k(x)$ y en el que habrá k binomios. O sea:

$$t_k(x) = a_k(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_{n-k+2})(x - x_{n-k+1}).$$

Al formular el polinomio $P(x-h)$, este término se convierte en

$$t_k(x-h) = a_k(x-x_n-h)(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+2}).$$

La diferencia $\nabla P(x)$ afectará a $t_k(x)$ restándole $t_k(x-h)$, y tendremos:

$$\begin{aligned} & \nabla t_k(x) = t_k(x) - t_k(x-h) = a_k(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots \\ \dots \quad & (x-x_{n-k+2})(x-x_{n-k+1}-x+x_n+h) = \\ = \quad & a_k\,k\,h(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+2}). \end{aligned}$$

Las diferencias de órdenes $2, 3, \dots, k$ de $t_k(x)$ salen inmediatamente a partir de esta primera que acabamos de hallar. Podemos escribir sucesivamente:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 t_k(x) = a_k k\,h\,\nabla[(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+2})] = \\ & = a_k k\,(k-1)h^2(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+3}); \\ & \nabla^3 t_k(x) = a_k k\,(k-1)h^2\,\nabla[(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+3})] = \\ & = a_k k\,(k-1)(k-2)h^3(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_{n-k+4}); \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \nabla^k t_k(x) = k!h^k a_k. \end{aligned}$$

Las de orden superior a k son nulas.

Con estas fórmulas, ya podemos conocer las diferencias regresivas del polinomio (2.2a), que serán:

$$\begin{aligned} & \nabla P(x) = a_1 h + 2a_2 h(x-x_n) + 3a_3 h(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \\ + \quad & \dots + na_n h(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_2); \\ & \nabla^2 P(x) = 2a_2 h^2 + 3\cdot 2a_3 h^2(x-x_n) + 4\cdot 3a_4 h^2(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots \\ \dots \quad & +n(n-1)a_n h^2(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_3); \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & \nabla^n P(x) = n!a_n h^n. \end{aligned}$$

Si en todas estas expresiones hacemos $x = x_n$, podemos despejar a_1 en la primera, a_2 en la segunda,..., a_n en la última; y si tenemos en cuenta que es $P(x_n) = f(x_n) = y_n$, resulta:

$$a_1 = \frac{\nabla y_n}{h},\quad a_2 = \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2},\quad \dots, a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}.$$

Por lo tanto, el polinomio (2.2a) será:

$$P(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots$$

$$\dots + \frac{\nabla^n y_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1). \qquad (2.2b)$$

Es también un polinomio interpolador (Newton-Gregory) que viene expresado con las n diferencias regresivas de y_n. En los puntos $x = x_0,\ x_1, \dots, x_n$ toma los mismos valores que la función $f(x)$, y sirve para aproximarla en los demás puntos de $[x_0, x_n]$.

Como hicimos con el polinomio (2.1c), también podemos verificar *a posteriori* que (2.2b) toma los valores $y_0,\ y_1, \ldots, y_n$ en los puntos $x_0,\ x_1, \ldots, x_n$ respectivamente. Por ejemplo, haciendo $x = x_0$ en (2.2b) -valor que no figura en ningún binomio-, es:

$$P(x_0) = y_n - n\nabla y_n + \frac{n(n-1)}{2!}\nabla^2 y_n - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\nabla^3 y_n + \ldots + (-1)^n \nabla^n y_n =$$

$$= y_n - \binom{n}{1}\nabla y_n + \binom{n}{2}\nabla^2 y_n - \binom{n}{3}\nabla^3 y_n + \ldots + (-1)^n \nabla^n y_n,$$

que es la fórmula (1.1b) del apartado 1.1. Por lo tanto, $P(x_0) = y_0$.

2.3. Aplicación al cálculo numérico de ecuaciones diferenciales

En el cálculo numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuando se emplea los métodos multipaso, vimos en el capítulo 5 de este libro que para hallar un valor aproximado y_{j+1} de la curva integral en $x = x_{j+1}$ nos apoyábamos no sólo en el valor inmediatamente anterior y_j sino también en otros anteriores sucesivos, previamente calculados; o sea, en valores de y en puntos equidistantes $x_j,\ x_{j-1}, \ldots, x_{j-p}$. Y esto se hacía por medio de un polinomio interpolador de grado p que incluíamos bajo la integral que figura en la expresión adoptada para y_{j+1}. Omitíamos entonces los detalles del cálculo del referido polinomio, cuyos coeficientes vienen en función de las diferencias regresivas de $f(x_j, y_j) = f_j$, donde f es el segundo miembro de la ecuación diferencial, y remitíamos al lector a este apéndice. Aquí hemos obtenido detalladamente la forma general (2.2b) de un polinomio interpolador de grado n con diferencias regresivas. Por lo tanto, la deducción de la fórmula (2.2b) explica lo que allí omitimos. Ahora bien, en (2.2b) aparecen las diferencias regresivas de un valor y_n, sencillamente porque ese polinomio pasa por los $n + 1$ puntos

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

En cambio, en el algoritmo general de los métodos numéricos de paso múltiple el polinomio interpolador ha de pasar por los puntos

$$(x_{j-p}, f_{j-p}),\ (x_{j-p+1}, f_{j-p+1}), \ldots (x_j, f_j),$$

lo cual requiere conocer primero los valores aproximados $y_{j-p},\ y_{j-p+1}, \ldots, y_j$ de la curva integral en $x = x_{j-p},\ x_{j-p+1}, \ldots, x_j$. Ya se comprende que para la obtención de un polinomio interpolador con diferencias, progresivas o regresivas, tanto da que el polinomio haya de tomar los valores $y_0, \ldots, y_n$ como los $f_{j-p}, \ldots, f_j$, o como otros cualesquiera. En cuanto al número de estos valores, sólo afecta al grado del polinomio.

Hagamos una precisión más: los puntos igualmente distanciados (paso h) $x_{j-p},\ x_{j-p+1}, \ldots, x_j$ pertenecen al conjunto

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1},\ x_n\};$$

es decir, son parte de los puntos de división de un intervalo base $[x_0, x_n]$ en el cual nos interesa conocer aproximadamente la curva integral de $y' = f(x, y)$ que cumple la

condición $y(x_0) = y_0$. Suponemos que el valor y_0 de esta condición inicial es exacto, y ello nos obliga a arrancar de él para ir hallando los demás. Pero un método de paso múltiple sólo puede empezar a aplicarse cuando se conoce un cierto número de valores de y; por ejemplo, $y_0, y_1, \ldots, y_p$; con estos valores podemos hallar y_{p+1} utilizando el multipaso; y después todos los siguientes $y_{p+2}, \ldots, y_n$. Así, pues, si queremos hallar un valor y_{j+1} correspondiente a uno cualquiera $x = x_{j+1}$ tenemos que apoyarnos en los $p+1$ precedentes: $y_j, y_{j-1}, \ldots, y_{j-p}$, debiendo ser $n > j \geqslant p > 0$. Los $p+1$ primeros valores $y_0, y_1, \ldots, y_p$ tienen que ser obtenidos con un método monopaso.

Si en el polinomio (2.2b) consideramos sólo los $p+1$ valores $y_{j-p}, \ldots, y_j$, en vez de la totalidad de los y en $x_0, \ldots, x_n$, tendremos:

$$P(x) = y_j + \frac{\nabla y_j}{h}(x - x_j) + \frac{\nabla^2 y_j}{2!h^2}(x - x_j)(x - x_{j-1}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\nabla^p y_j}{p!h^p}(x - x_j)(x - x_{j-1})\ldots(x - x_{j-p+1}). \qquad (2.3a)$$

No es este, repetimos, el interpolador de los multipaso, cuyas diferencias vienen referidas a f_j; pero basta sustituir en (2.3a) y_j por f_j.

Podemos dar a este polinomio otra forma más conveniente, haciendo el cambio de variable $x = x_j + \theta h$, o sea: $x - x_j = \theta h$. Además, como

$$x_{j-1} = x_j - h,\ x_{j-2} = x_j - 2h, \ldots, x_{j-p+1} = x_j - (p-1)h,$$

será:

$$x - x_{j-1} = x - x_j + h = 0h + h = (\theta + 1)h;$$

$$x - x_{j-2} = x - x_j + 2h = \theta h + 2h = (\theta + 2)h; \ldots$$

$$\ldots;\ x - x_{j-p+1} = x - x_j + (p-1)h =$$

$$\theta h + (p-1)h = (\theta + p - 1)h.$$

Sustituyendo todo esto en la expresión (2.3a), nos queda:

$$P(x_j + \theta h) = y_j + \theta \nabla y_j + \theta(\theta + 1)\frac{\nabla^2 y_j}{2!} + \ldots$$

$$\ldots + \theta(\theta + 1)(\theta + 2)\ldots(\theta + p - 1)\frac{\nabla^p y_j}{p!}. \qquad (2.3b)$$

Este polinomio sirve, claro es, tanto para interpolar como para extrapolar. Si damos a θ los valores enteros $0, -1, -2, \ldots, -p$, tendremos, respectivamente, $y_j, y_{j-1}, \ldots, y_{j-p}$, cosa que comprobamos a continuación:

$$P(x_j) = y_j;\ P(x_j - h) = P(x_{j-1}) = y_j - \nabla y_j = y_j - y_j + y_{j-1} = y_{j-1};\ \text{etc.}$$

Dando a θ valores negativos no enteros del intervalo $[-p, 0]$, estaremos interpolando entre dos valores consecutivos y conocidos de y, cada vez. Pero si damos a θ valores positivos menores o iguales que la unidad, estaremos extrapolando en puntos del semiabierto $(x_j, x_{j+1}]$, y la precisión será tanto mayor cuanto más próximos a x_j están los valores de x; es decir, cuanto más pequeño sea $|\theta|$.

3. ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Sea $\varphi(t)$ una función que está definida en los puntos igualmente separados $t_0, t_1, t_2, \ldots$, cuya distancia entre cada dos consecutivos es $h = const$. Si hacemos el cambio de variable

$$x = \frac{t - t_0}{h},$$

la función $\varphi(t)$ se transforma en otra $f(x)$ que está definida en los puntos $x = 0, 1, 2, \ldots$ En lo que sigue consideraremos funciones $f(x)$ definidas en $x \in \mathbb{Z}$ y, por lo tanto, de paso $h = 1$.

Llamamos *ecuación en diferencias finitas de orden n* a la que tiene la forma general

$$G\left(x, f(x), \Delta f(x), \Delta^2 f(x), \ldots, \Delta^n f(x)\right) = 0.$$

Si desarrollamos las diferencias que figuran en la expresión anterior, tendremos:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x);\ \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x),$$

etc. Entonces, la ecuación puede escribirse también así:

$$F(x, f(x), f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+n)) = 0.$$

Por ejemplo, son ecuaciones en diferencias finitas las siguientes:

$$f(x+1) - f(x) = x;\ f(x+1) + xf(x) = 0;\ f(x+2) - (x+1)f(x) = x - 1.$$

La última es de segundo orden, y las anteriores de primero. Como se advierte en seguida, son lineales. La primera tiene coeficientes constantes; las otras dos, no.

Resolver una ecuación en diferencias es encontrar, al menos, una función $u(x)$ definida en $\mathbb{Z}$ que satisfaga a dicha ecuación. Nosotros vamos a referirnos aquí solamente a ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

3.1. Ecuación lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

Tiene la forma

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + a_2 f(x+n-2) + \ldots + a_{n-1} f(x+1) + a_n f(x) = 0, \quad (3.1a)$$

donde los a_k son constantes.

Es muy fácil demostrar que toda combinación lineal de soluciones de (3.1a) es también solución de dicha ecuación.

Llamamos *sistema fundamental* de soluciones de (3.1a) a todo conjunto de n soluciones $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ tal que la igualdad

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

implica necesariamente $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$. Sobra añadir que esto ha de verificarse para todo valor entero de x. Entonces, es también fácil demostrar que el determinante

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_n(x) \\ f_1(x+1) & f_2(x+1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_n(x+1) \\ f_1(x+2) & f_2(x+2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f_n(x+2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1(x+n-1) & f_2(x+n-1) \ldots\ldots f_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero $\forall x \in \mathbb{Z}$. Y recíprocamente.

Finalmente, toda solución de (3.1a) es una combinación lineal de las funciones de cualquier sistema fundamental. Así, pues, la *solución general* de la ecuación homogénea tiene tantas constantes arbitrarias como orden tenga la ecuación; lo mismo que ocurre en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para resolver (3.1a) sugerimos soluciones de la forma $f(x) = r^x$. Entonces, puesto que será $f(x+m) = r^{x+m}$, tendrá que verificarse

$$r^{x+n} + a_1 r^{x+n-1} + \ldots + a_{n-1} r^{x+1} + a_n r^x = 0.$$

O sea:

$$r^x(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) = 0,$$

lo cual implica

$$r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0,$$

que es la "ecuación característica", análoga a la de una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n con coeficientes constantes.

Si las n raíces de esta ecuación son distintas, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, la solución general de (3.1a) será

$$f(x) = c_1 r_1^x + c_2 r_2^x + \ldots + c_n r_n^x,$$

pues las funciones $r_1^x, r_2^x, \ldots, r_n^x$ forman un sistema fundamental de soluciones de (3.1a), ya que el determinante

$$\begin{vmatrix} r_1^x & r_2^x \ldots\ldots\ldots\ldots r_n^x \\ r_1^{x+1} & r_2^{x+1} \ldots\ldots\ldots\ldots r_n^{x+1} \\ r_1^{x+2} & r_2^{x+2} \ldots\ldots\ldots\ldots r_n^{x+2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{x+n-1} & r_2^{x+n-1} \ldots\ldots r_n^{x+n-1} \end{vmatrix} = r_1^x r_2^x \ldots r_n^x \begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots\ldots\ldots 1 \\ r_1 & r_2 \ldots\ldots\ldots r_n \\ r_1^2 & r_2^2 \ldots\ldots\ldots r_n^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} \ldots\ldots r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero (el que aparece en el segundo miembro es un determinante de Vandermonde, cuyos elementos $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son distintos).

Si la ecuación característica tiene raíces imaginarias simples,

$$r_{1,2} = \rho(\cos\alpha \pm i \operatorname{sen}\alpha),$$

la parte de solución correspondiente a ellas es

$$\rho^x(c_1 \cos\alpha x + c_2 \operatorname{sen}\alpha x).$$

Si hay una raíz r_k múltiple de orden m, la parte de solución que le corresponde es

$$r_k^x(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}).$$

Ejemplo:

Hallar la solución general de la ecuación

$$\Delta^2 f(x) - 9f(x) = 0.$$

Tenemos:

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x).$$

La ecuación es, pues: $f(x+2) - 2f(x+1) - 8f(x) = 0$, lineal y homogénea de segundo orden. Su ecuación característica es $r^2 - 2r - 8 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 4$, $r_2 = -2$. Luego un sistema fundamental de soluciones es $\{4^x, (-2)^x\}$. La solución general será:

$$f(x) = c_1 4^x - c_2(-2)^x.$$

3.2. Ecuación lineal no homogénea de orden n con coeficientes constantes

Tiene la forma

$$f(x+n) + a_1 f(x+n-1) + a_2 f(x+n-2) + \ldots + a_{n-1} f(x+1) + a_n f(x) = h(x). \quad (3.2a)$$

Si $g(x)$ es una solución particular de esta ecuación, su solución general es la general de la homogénea más $g(x)$. Se trata de hallar, pues, una solución particular de (3.2a). Cuando el segundo miembro $h(x)$ de la ecuación es un polinomio, o el producto de un polinomio por una exponencial b^x, no es difícil obtener una solución $g(x)$. Supongamos que es

$$h(x) = b^x(p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \ldots + p_{m-1} x + p_m).$$

Ensayaremos entonces una solución de la forma

$$g(x) = b^x(A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m),$$

pero siempre que b no sea raíz de la ecuación característica de la homogénea. El factor polinómico a ensayar tiene que ser del mismo grado que el de $h(x)$, y sus coeficientes indeterminados $A_0, \ldots, A_m$ los hallaremos por identificación.

Si b fuera raíz simple de la ecuación característica, ensayaríamos soluciones de la forma

$$g(x) = xb^x(A_0x^m + \ldots + A_m).$$

En general, si b fuera raíz múltiple de orden k de la ecuación característica, ensayaríamos

$$g(x) = x^k b^x(A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m).$$

En todos los casos, los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$ se obtienen por identificación después de haber sustituido en el primer miembro de (3.2a) $f(x)$ por la $g(x)$ que se ensaya.

Ejemplo:

Hallemos la solución general de la ecuación

$$f(x+2) - 4f(x) = 2^x(x^2 - x).$$

Es lineal de segundo orden, no homogénea. La ecuación característica es $r^2 - 4 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 2, r_2 = -2$. La base b de la exponencial del segundo miembro es, pues, raíz de esta ecuación característica. Por lo tanto, ensayaremos una solución particular de la forma

$$g(x) = x\,2^x(A_0\,x^2 + A_1\,x + A_2) = 2^x(A_0\,x^3 + A_1\,x^2 + A_2\,x).$$

Como hay que sustituir esta $g(x)$ en el primer miembro de la ecuación del enunciado, empecemos por formular $g(x+2)$, que es, naturalmente,

$$g(x+2) = 2^{x+2}\left(A_0(x+2)^3 + A_1(x+2)^2 + A_2(x+2)\right) = 2^x\big[4\,A_0\,x^3 + \\ +(24\,A_0 + 4\,A_1)x^2 + (48\,A_0 + 16\,A_1 + 4\,A_2)x + 32\,A_0 + 16\,A_1 + 8\,A_2\big].$$

Por lo tanto, $g(x+2) - 4g(x)$ será, después de agrupar las potencias iguales de x:

$$g(x+2) - 4g(x) = 2^x\left(24\,A_0x^2 + (48\,A_0 + 16\,A_1)x + 32\,A_0 + 16\,A_1 + 8\,A_2\right),$$

resultado que debe ser igual a $h(x) = 2^x(x^2 - x)$. Como el factor exponencial es el mismo, identificaremos los coeficientes de las mismas potencias de x de ambos polinomios, y resulta:

$$A_0 = \frac{1}{24},\ A_1 = \frac{-3}{16},\ A_2 = \frac{5}{24}.$$

Así, pues, la solución particular $g(x)$ que vamos buscando es

$$g(x) = x\,2^x\left(\frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{16}x + \frac{5}{24}\right).$$

La solución general de la ecuación es igual a la general de la homogénea más $g(x)$; es decir:

$$f(x) = c_1\,2^x + c_2(-2)^x + x\,2^x\left(\frac{1}{24}x^2 - \frac{3}{16}x + \frac{5}{24}\right).$$

3.3. Problema de Cauchy

Dada una ecuación (3.2a) lineal, de orden n, con coeficientes constantes, existe una solución única $u(x)$ definida en $x \in \mathbb{Z}$ que satisface las n condiciones iniciales

$$u(x_0) = y_0,\ u(x_0+1) = y_1,\ u(x_0+2) = y_2, \ldots, u(x_0+n-1) = y_{n-1}.$$

En efecto, poniendo en (3.2a) $x = x_0$, y teniendo en cuenta estas condiciones, nos queda:

$$u(x_0+n) + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} y_1 + a_n y_0 = h(x_0).$$

De aquí podemos despejar $u(x_0+n)$, que nos dará un número. Es decir, la función $u(x)$ que toma los valores prefijados en los enteros

$$x = x_0,\ x_0+1,\ x_0+2, \ldots, x_0+n-1$$

está definida también en el entero x_0+n.

Si en (3.2a) damos a x el valor x_0+1, y tenemos en cuenta los valores iniciales y el de $u(x_0+n)$ últimamente obtenido, podemos despejar $u(x_0+n+1)$. Y así sucesivamente. Por lo tanto, la función $u(x)$ que verifica las condiciones iniciales está definida para todo $x \in \mathbb{Z}$, y es, pues, única. Vemos además que es la propia ecuación (3.2a) la que provee el algoritmo que define a la solución $u(x)$.

4. CALCULO DE LAS POTENCIAS SUCESIVAS DE UNA MATRIZ

Sea $A \in M_{m\times m}$ una matríz constante, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ las raíces, reales o complejas, del polinomio característico $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$, contadas cada una de ellas tantas veces como indique su orden de multiplicidad. Definamos las siguientes matrices:

$$Q_0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & 1\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

$$Q_j = (A - \lambda_j I)\, Q_{j-1};\ j = 1, 2, \ldots, m-1$$
$$Q_m = (A - \lambda_m I)\, Q_{m-1}$$

Se pide:

i) Demostrar que

$$Q_m = 0 = \begin{bmatrix} 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\ldots 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

ii) $\forall n \geqslant 0$ existen coeficientes $\omega_1(n), \omega_2(n), \ldots, \omega_m(n)$ escalares tales que

$$A^n = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(n)\, Q_{j-1}.$$

iii) Encontrar y resolver las ecuaciones en diferencias que satisfacen los coeficientes $\omega_j(n)$

La solución es la siguiente:

i) Para demostrar este apartado nos basamos en el siguiente y conocido resultado: "Toda matriz A anula a su polinomio característico $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$".

En nuestro caso, como $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ son todas las raíces de $p(\lambda)$, el polinomio puede expresarse como

$$p(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j).$$

Pero entonces la matriz $p(A)$, obtenida de $p(\lambda)$ sustituyendo λ por A y λ_j por $\lambda_j I$,

$$p(A) = (-1)^m \prod_{j=1}^{m} (A - \lambda_j I),$$

es la matriz cero en $M_{m\times m}$.

Por otra parte,

$$Q_m = (A - \lambda_m I)Q_{m-1} = (A - \lambda_m I)(A - \lambda_{m-1} I)Q_{m-2} = \prod_{j=1}^{m} (A - \lambda_j I).$$

Luego Q_m sólo difiere de $p(A)$ en el factor escalar $(-1)^m$. Como $p(A) = 0$, necesariamente será $Q_m = 0$.

ii) Utilizando $Q_m = 0$, así como la expresión de las Q_j, se tiene:

$$\begin{aligned} &Q_m = 0 \\ &A\,Q_{m-1} = \lambda_m\, Q_{m-1} \\ &A\,Q_{j-1} = Q_j + \lambda_j\, Q_{j-1};\ j = 1, 2, \ldots, m-1, \end{aligned}$$

de donde resulta obvio que todas las potencias de A pueden escribirse como combinación lineal de $\{Q_0, \ldots, Q_{m-1}\}$. Por ejemplo, se tiene:

$$\begin{aligned} &A^0 = I = Q_0 \\ &A = A\,I = A\,Q_0 = Q_1 + \lambda_1\, Q_0 \\ &A^2 = A\,A = A(Q_1 + \lambda_1\, Q_0) = A\,Q_1 + \lambda_1\, A\,Q_0 = Q_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)Q_1 + \lambda_1^2\, Q_0, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Tal situación puede resumirse en la afirmación de que

$$A^n = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(n)\, Q_{j-1},$$

donde, como es natural, los coeficientes $\omega_j(\cdot)$ dependerán del orden de la potencia n a la que se eleva A.

iii) Pasemos ahora a la determinación de los coeficientes $\omega_j(n)$. Por un lado, $A^0 = I = Q_0$. Asimismo,

$$A^0 = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(0)\, Q_{j-1}.$$

Por consiguiente,

$$(\omega_1(0) - 1)Q_0 + \omega_2(0)\, Q_1 + \ldots + \omega_m(0)\, Q_{m-1} = 0.$$

Una forma de que esta relación se satisfaga consiste en elegir

$$\begin{cases} \omega_1(0) = 1 \\ \omega_j(0) = 0, \ \forall j = 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Por otra parte, la matriz A satisface la identidad $A^{n+1} = A\, A^n$. Pero

$$A^{n+1} = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(n+1)\, Q_{j-1}.$$

También es:

$$A\, A^n = A\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j(n)\, Q_{j-1} \right) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(n)\, A\, Q_{j-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \omega_j(n)\, (Q_j + \lambda_j\, Q_{j-1}).$$

Igualando ambas expresiones y agrupando todo en un solo miembro, resulta:

$$(\omega_1(n+1) - \lambda_1\omega_1(n))\, Q_0 + (\omega_2(n+1) - \lambda_2\omega_2(n) - \omega_1(n))\, Q_1 + \ldots$$
$$\ldots \ + (\omega_m(n+1) - \lambda_m\omega_m(n) - \omega_{m-1}(n))\, Q_{m-1} - \omega_m(n) Q_m = 0.$$

Como $Q_m = 0$, el último sumando *no condiciona* la elección de $\omega_m(n)$. Entonces, una condición suficiente para que sea satisfecha la identidad anterior es que

$$\omega_1(n+1) = \lambda_1\omega_1(n)$$
$$\omega_j(n+1) = \lambda_j\omega_j(n) + \omega_{j-1}(n); \ j = 2, \ldots, m$$

Reuniendo estas ecuaciones y las condiciones iniciales ya obtenidas se llega a que *los problemas en diferencias que han de satisfacer los coeficientes* $\omega_j(n)$, $j = 1, \ldots, m$, *pueden ser resumidos en las siguientes expresiones:*

$$\begin{cases} \omega_1(n+1) = \lambda_1\omega_1(n) \\ \omega_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_2(n+1) = \lambda_2\omega_2(n) + \omega_1(n) \\ \omega_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{cases} \omega_m(n+1) = \lambda_m\omega_m(n) + \omega_{m-1}(n) \\ \omega_m(0) = 0 \end{cases}$$

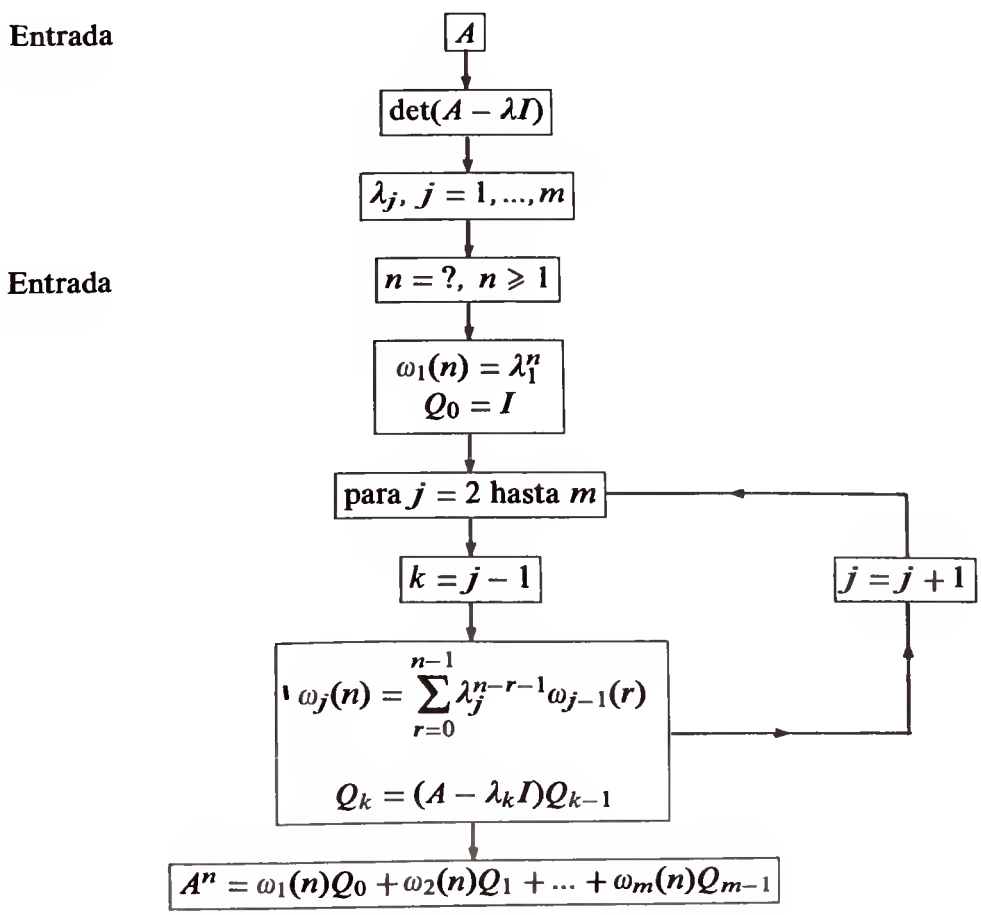
Estas ecuaciones en diferencias son escalares, y se resuelven en cascada, de arriba abajo. Resulta fácil ver que

$$\begin{aligned} \omega_1(n) &= \lambda_1^n \\ \omega_j(n+1) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_j^{n-k}\, \omega_{j-1}(k);\ j = 2, \ldots, m;\ n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión ii) se obtiene automáticamente la matriz A^{n+1} :

$$A^{n+1} = \lambda_1^{n+1} I + \sum_{j=2}^{m} \sum_{k=0}^{n} \lambda_j^{n-k} \omega_{j-1}(k)\, Q_{j-1}$$

NOTA: Los cálculos anteriores pueden disponerse para ser computados, según el siguiente organigrama:



Observaciones:

a) En el organigrama no están explícitas las instrucciones previas, tales como dimensiones de las matrices (se les supone $m \times m$),etc.

b) El cálculo de las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ del polinomio $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ se supone hecho por otros medios, bien a mano (si ello es posible), bien acudiendo a alguno de los métodos numéricos para el cálculo de autovalores, método que puede introducirse en el programa como subrutina del mismo. En el primer supuesto, los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ entrarían, pues, como datos.

Aplicación a un ejemplo:

Encontrar la solución de la ecuación

$$\begin{cases} x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0 \\ x(0) = y_0,\ x(1) = y_1,\ x(2) = y_2 \end{cases}$$

(Las funciones que hemos llamado antes $f(x)$, $f(x+1)$, etc., se expresan aquí como funciones $x(n)$ de la variable n).

Transformemos la ecuación en diferencias en un sistema equivalente, mediante el cambio

$$x_1(n) = x(n),\ x_2(n) = x(n+1),\ x_3(n) = x(n+2);\ n \geqslant 0.$$

El sistema al que se llega es, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix}$$

Calculemos las raíces de

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)^3,$$

que son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Procedemos a construir las matrices $Q_j, j = 0, 1, 2$.

Se tiene:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I;\ Q_1 = (A - \lambda_1 I)Q_0 = (A - \lambda_1 I)I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix};$$

$$Q_2 = (A - \lambda_2 I)Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema se sabe que es:

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Luego se trata de calcular A^n. Por otra parte, se sabe que

$$\omega_1(n) = \lambda_1^n = 1^n = 1, \ \forall n \geqslant 0$$

$$\omega_2(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_2^{n-r-1} \omega_{2-1}(r) = \sum_{r=0}^{n-1} 1^{n-r-1} \cdot 1 = \sum_{r=0}^{n-1} 1 = n;$$

$$\omega_3(n) = \sum_{r=0}^{n-1} \lambda_3^{n-r-1} \omega_{3-1}(r) = \sum_{r=0}^{n-1} 1^{n-r-1} r = \sum_{r=0}^{n-1} r = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Por lo tanto:

$$A^n = \omega_1(n) Q_0 + \omega_2(n) Q_1 + \omega_3(n) Q_2 = I +$$

$$+ n(A - I) + \frac{1}{2} n(n-1)(A - I)^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(n-1)(n-2) & -n(n-2) & \frac{1}{2} n(n-1) \\ \frac{1}{2} n(n-1) & -(n+1)(n-1) & \frac{1}{2}(n+1)n \\ \frac{1}{2}(n+1)n & -(n+2)n & \frac{1}{2}(n+2)(n+1) \end{bmatrix}$$

Ahora bien, de acuerdo con el cambio de función

$$x_1(n) = x(n), \ x_2(n) = x(n+1), \ x_3(n) = x(n+2),$$

una solución de la ecuación en diferencias es, precisamente, la primera componente del vector

$$A^n \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Es decir, la solución buscada es:

$$x(n) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) y_0 - n(n-2) y_1 + \frac{1}{2} n(n-1) y_2; \ n \geqslant 0.$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Expresar $e^{2(x+n)}$ por medio de una suma en función de las diferencias primera, segunda,..., enésima de e^{2x}.

SOLUCION: Tenemos sucesivamente:

$$\Delta e^{2x} = e^{2(x+1)} - e^{2x} = e^{2x}(e^2 - 1);$$
$$\Delta^2 e^{2x} = (e^2 - 1)\Delta e^{2x} = e^{2x}(e^2 - 1)^2; \ldots$$
$$\ldots \quad \Delta^n e^{2x} = e^{2x}(e^2 - 1)^n.$$

Recordando que $\zeta^n(e^{2x}) = e^{2(x+n)}$, y que

$$\zeta^n = (1 + \Delta)^n = 1 + n\Delta + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^{n-2} + n\Delta^{n-1} + \Delta^n,$$

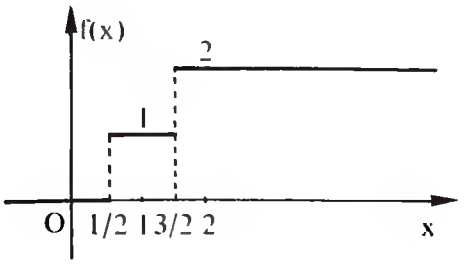
será:

$$\zeta^n(e^{2x}) = e^{2(x+n)} = e^{2x} + n\Delta e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 e^{2x} + \ldots$$
$$\ldots \quad + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^{n-2}e^{2x} + n\Delta^{n-1}e^{2x} + \Delta^n e^{2x}.$$

Sustituyendo aquí las expresiones de las diferencias de e^{2x}, resulta:

$$e^{2(x+n)} = e^{2x}\left(1 + n(e^2 - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(e^2 - 1)^2 + \ldots + n(e^2 - 1)^{n-1} + (e^2 - 1)^n\right).$$

2. Expresar analítica y gráficamente las diferencias genéricas primera y segunda de la escalonada de la figura (paso $h = 1$)



SOLUCION: Vamos a encontrar primeramente la expresión matemática de la escalonada. Como tiene dos discontinuidades en 1/2 y 3/2 respectivamente, dicha expresión será de la forma (cap. 1).

$$f(x) = a_1 \frac{\left|x - \frac{1}{2}\right|}{x - \frac{1}{2}} + a_2 \frac{\left|x - \frac{3}{2}\right|}{x - \frac{3}{2}} + a_3,$$

debiéndose verificar:

$$\text{en } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right): \quad -a_1 - a_2 + a_3 = 0,$$

$$\text{en } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right): \quad a_1 - a_2 + a_3 = 1,$$

$$\text{en } \left(\frac{3}{2}, +\infty\right): \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2,$$

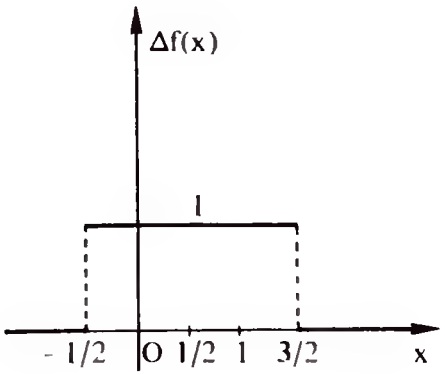
lo que nos da $a_1 = a_2 = 1/2$, $a_3 = 1$. La expresión de la escalonada es, pues:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left|x - \frac{1}{2}\right|}{x - \frac{1}{2}} + \frac{\left|x - \frac{3}{2}\right|}{x - \frac{3}{2}}\right] + 1.$$

La diferencia primera será:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{\left|x + \frac{1}{2}\right|}{x + \frac{1}{2}} - \frac{\left|x - \frac{3}{2}\right|}{x - \frac{3}{2}}\right],$$

cuya gráfica es otra escalonada con saltos en $-1/2$ y $3/2$ (figura).



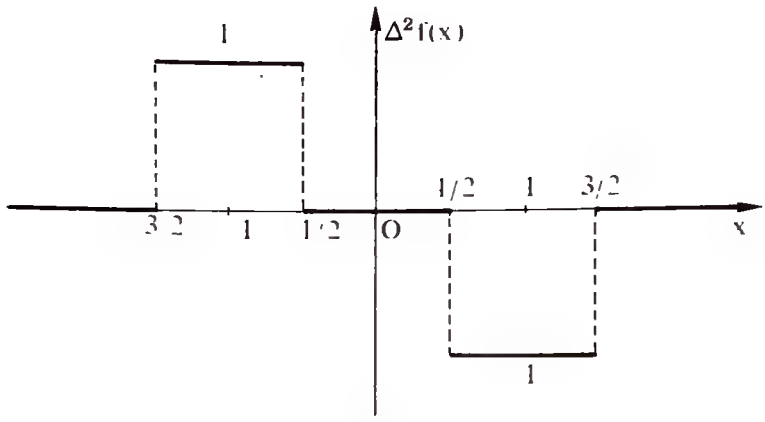
Se puede obtener directamente esta gráfica razonando sobre la anterior a base de la definición de diferencia primera y paso $h = 1$.

La diferencia segunda es

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\left|x + \frac{3}{2}\right|}{x + \frac{3}{2}} - \frac{\left|x + \frac{1}{2}\right|}{x + \frac{1}{2}} - \frac{\left|x - \frac{1}{2}\right|}{x - \frac{1}{2}} + \frac{\left|x - \frac{3}{2}\right|}{x - \frac{3}{2}}\right],$$

que es otra escalonada, con discontinuidades en $-3/2$, $-1/2$, $1/2$ y $3/2$ (figura).



También es fácil dibujar esta gráfica razonando sobre la anterior con la definición de su diferencia primera, y paso $h = 1$.

3. Calcular $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = S_n$.

SOLUCION: Se puede considerar a S_n como una función $S(n)$ definida en los números naturales. Calculemos sus diferencias finitas:

$$\Delta S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 - (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = (n+1)^3$$
$$\Delta^2 S_n = (n+2)^3 - (n+1)^3 = 3n^2 + 9n + 7$$
$$\Delta^3 S_n = 3(n+1)^2 + 9(n+1) + 7 - (3n^2 + 9n + 7) = 6n + 12$$
$$\Delta^4 S_n = 6(n+1) + 12 - (6n + 12) = 6.$$

Al ser las diferencias cuartas constantes, es obvio que S_n se puede representar por un polinomio de grado 4. Utilizando el polinomio interpolador de Newton, es:

$$S_n = P_4(n) = S_1 + \frac{\Delta S_1}{1! \cdot 1}(n-1)^{(1)} + \frac{\Delta^2 S_1}{2! \cdot 1^2}(n-1)^{(2)} + \frac{\Delta^3 S_1}{3! \cdot 1^3}(n-1)^{(3)} + \frac{\Delta^4 S_1}{4! \cdot 1^4}(n-1)^{(4)}$$

Y como es

$$\Delta S_1 = 2^3 = 8;\ \Delta^2 S_1 = 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 7 = 19;$$
$$\Delta^3 S_1 = 6 \cdot 1 + 12 = 18;\ \Delta^4 S_1 = 6;\ S_1 = 1,$$

queda:

$$S_n = P_4(n) = 1 + 8(n-1) + \frac{19}{2}(n-1)(n-2) + \frac{18}{6}(n-1)(n-2)(n-3) +$$
$$+ \frac{6}{24}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Por otra parte,

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

es la suma de los n primeros números naturales, con lo cual resulta la curiosa fórmula:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

4. Dada la tabla de sen x

x	20^o	21^o	22^o	23^o	24^o	25^o
y	0,3420	0,3584	0,3746	0,3907	0,4067	0,4226

aproximar con el polinomio interpolador de Newton sen $24^0 30'$.

SOLUCION: Formemos la tabla de diferencias:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
20^o	0,3420	0,0164	–0,0002
21^o	0,3584	0,0162	–0,0001
22^o	0,3746	0,0161	–0,0001
23^o	0,3907	0,0160	–0,0001
24^o	0,4067	0,0159	
25^o	0,4226		

Al ser las diferencias segundas prácticamente constantes, podemos aproximar con el polinomio de Newton de grado 2 :

$$\text{sen } 24^0 30' = 0,3420 + \frac{0,0164}{1!1}\left(4 + \frac{1}{2}\right)^{(1)} + \frac{-0,0002}{2!1^2}\left(4 + \frac{1}{2}\right)^{(2)} =$$

$$= 0,3420 + 0,0164 \cdot (4,5) - \frac{0,0002}{2}(4,5)(3,5) = 0,414225.$$

(El valor que dan las tablas es 0, 4147)

5. Hallar una fórmula empírica para

x	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2,94	5,85	8,76	13,7

SOLUCION: Calculamos la tabla de diferencias:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	0	1	0,94	0,03
2	1	1,94	0,97	0,03
3	2,94	2,91	1	0,03
4	5,85	3,91	1,03	
5	8,76	4,94		
6	13,7			

Como las diferencias terceras son constantes, podemos utilizar un polinomio de Newton de tercer grado. Será:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0 + \frac{1}{1!1}(x-1)^{(1)} + \frac{0,94}{2!1}(x-1)^{(2)} + \frac{0,03}{3!1^2}(x-1)^{(3)} = \\ &= x - 1 + 0,47(x-1)(x-2) + 0,005(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= 0,005x^3 + 0,44x^2 - 0,355x - 0,09. \end{aligned}$$

6. Formular una ecuación lineal homogénea en diferencias sabiendo que las raíces de su polinomio característico son las cuatro primeras diferencias terceras de la sucesión de Fibonacci, y escribir la solución general.

SOLUCION: Puesto que el polinomio característico tiene cuatro raíces, la ecuación en diferencias será de 4^0 orden, y tendrá la forma:

$$f(x+4) + a_1 f(x+3) + a_2 f(x+2) + a_3 f(x+1) + a_4 f(x) = 0.$$

Los coeficientes $1, a_1, a_2, a_3, a_4$ son los mismos del polinomio característico. La sucesión de Fibonacci (apodo de Leonardo de Pisa) empieza con los números cero y la unidad; los siguientes se obtienen sumando los dos precedentes inmediatos. La sucesión es, pues: $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$. Las diferencias primeras son $1, 0, 1, 1, \ldots$. Las segundas serán $-1, 1, 0, 1, 1, \ldots$. Las cuatro primeras diferencias terceras son: $2, -1, 1, 0$. El polinomio característico será:

$$(r-2)(r+1)(r-1)r = r^4 - 2r^3 - r^2 + 2r.$$

La ecuación es, pues:

$$f(x+4) - 2f(x+3) - f(x+2) + 2f(x+1) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es una combinación lineal de las exponenciales cuyas bases son las raíces del polinomio característico (que son todas distintas). O sea:

$$f(x) = c_1 2^x + c_2(-1)^x + c_3$$

7. Hallar la solución general de la ecuación

$$\Delta^3 f(x) - 2\Delta^2 f(x) + \Delta f(x) = 2^x(3x-1).$$

SOLUCION: Pongamos las diferencias en la forma

$$\begin{aligned} &\Delta f(x) = f(x+1) - f(x); \\ &\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x); \\ &\Delta^3 f(x) = \Delta f(x+2) - 2\Delta f(x+1) + \\ + \quad &\Delta f(x) = f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

Nos queda la ecuación:

$$f(x+3) - 5f(x+2) + 8f(x+1) - 4f(x) = 2^x(3x-1)$$

El polinomio característico de la homogénea será $r^3 - 5r^2 + 8r - 4$, cuyos ceros son $r_1 = 1$, $r_2 = r_3 = 2$. Como uno es doble, la solución general de la homogénea es

$$c_1 + 2^x(c_2 + c_3x).$$

Busquemos ahora una solución particular $g(x)$ de la ecuación no homogénea. Como el segundo miembro es el producto de un polinomio por una exponencial, y como la base 2 de dicha exponencial es raíz doble de la característica, ensayaremos una solución de la forma $g(x) = x^2\,2^x(A_0x + A_1)$, donde tendremos que determinar los coeficientes A_0 y A_1. Formulemos

$$g(x+3) = 2^{x+3}(A_0(x+3)^3 + A_1(x+3)^2).$$

Del mismo modo, formulemos $g(x+2)$ y $g(x+1)$. Sustituyamos los resultados en el primer miembro de la ecuación en diferencias, puesto que $g(x)$ ha de ser una solución particular de ella. Después de agrupar y simplificar queda:

$$2^x(24A_0x + 72A_0 + 8A_1) = 2^x(3x - 1).$$

Identificando coeficientes, sale: $A_0 = 1/8$, $A_1 = -10/8$. Luego

$$g(x) = \frac{1}{8}\,x^2\,2^x(x - 10).$$

La solución general pedida será:

$$f(x) = c_1 + (c_2 + c_3x)\,2^x + \frac{1}{8}x^2(x - 10)\,2^x.$$

8. Encontrar todas las soluciones de la ecuación

$$x(n+3) - 7x(n+1) - 6x(n) = 0,$$

y en particular aquella que satisface las condiciones iniciales

$$x(0) = -1,\ x(1) = 2,\ x(2) = 0.$$

SOLUCION: El polinomio característico es $r^3 - 7r - 6$, cuyas raíces son

$$r_1 = -2,\ r_2 = -1,\ r_3 = 3.$$

Por lo tanto, tres soluciones linealmente independientes son:

$$x_1(n) = (-2)^n,\ x_2(n) = (-1)^n,\ x_3(n) = 3^n.$$

El resto de las soluciones se obtiene como combinación lineal de las anteriores:

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_2(-1)^n + c_3\,3^n.$$

La solución particular que se nos pide ha de satisfacer las condiciones iniciales dadas; luego

$$\begin{aligned} x(0) &= -1 = c_1 + c_2 + c_3; \\ x(1) &= 2 = -2c_1 - c_2 + c_3; \\ x(2) &= 0 = 4c_1 + c_2 + 9c_3. \end{aligned}$$

Este sistema lineal nos da

$$c_1 = -\frac{1}{5},\ c_2 = -1,\ c_3 = \frac{1}{5}.$$

La solución buscada será:

$$x(n) = -\frac{1}{5}(-2)^n - (-1)^n + \frac{1}{5}3^n = \left(\frac{2^n}{5} + 1\right)\cos(n+1)\pi + \frac{3^n}{5}$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

CAPITULO 2

1. La ecuación de la familia se halla fácilmente, y es

$$y = |x-1| + (c-1)x + 1.$$

Derivando y eliminando c queda, después de simplificar:

$$xy' - y = \frac{|x-1|}{x-1} - 1.$$

Para $x < 1$ es $xy' - y = -2$, que integrada nos da $y = kx + 2$. Hay que expresar k en función de la ordenada c del vértice: $y(1) = c \Rightarrow \ k = c - 2$. La ecuación de las rectas que contienen a los lados izquierdos será: $y = (c-2)x + 2$. Del mismo modo se obtiene la familia de las rectas correspondientes a los lados derechos, que es $y = cx$.

2. $a(x) = 2(\operatorname{tg} x - 1)$.

3. La ecuación admite el factor integrante $\mu(x) = 1/x^2$. Integrada, su solución viene implícitamente definida por

$$(y-x)^3 - \frac{1}{x}\operatorname{sen} x = cte.$$

4. $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\cos x + \frac{1}{2}e^{-x} + 3.$

5. $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x$; $n = 3$. De la ecuación de Bernouilli se pasa a la de primer orden lineal mediante el cambio $u = y^{-2}$. La solución general de la lineal es

$$u(x) = cx^2 + x^2 \ln x^2.$$

Luego

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{cx^2 + x^2 \ln x^2}}$$

definida

$$\forall x \in \mathbb{R} / cx^2 + x^2 \ln x^2 > 0.$$

6. $\mu(x) = 1/x^2$. La solución general es

$$\frac{y^2}{x} + \frac{1}{x} - x^3 = cte.$$

7. $\mu(x) = x^2$. Solución general:

$$\frac{1}{3}x^3y^3 - \frac{a^2}{2}x^2 = cte.$$

8. Es reducible a homogénea. Su solución general es

$$(y - x - 3)^2 + (x + 2)^2 = cte.$$

La curva que satisface $y(0) = 0$ corresponde a *const.* $= 13$. Luego será:

$$(y - x - 3)^2 + (x + 2)^2 = 13.$$

9. $\mu(x, y) = 1/xy$. Solución general:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}x^2y^2 = cte.$$

La solución que cumple $y(e^{-1}) = e$ da *const.* $= 5/2$. Luego será:

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{1}{2}x^2y^2 = \frac{5}{2}.$$

10. $\mu(x) = 1/\cos x$. Solución particular que cumple $y(\pi) = 1$ es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{xy^2}{\cos x} + y = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

11. $y^2(x^2 \ln x^2 + cx^2) - 1 = 0$.

12. Mediante el cambio de función $z(x) = y^2(x)$ se convierte en una lineal. Una vez integrada y deshecho el cambio, da la solución general

$$xy^2 = ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x.$$

13. Familia uniparamétrica

$$y = ce^x + (1 - c)e^{2x} - xe^x.$$

14. $\mu(x, y) = \dfrac{1}{y(x^2 + y^2)}$. La solución general es

$$y = ce^{-x}\sqrt{x^2 + y^2}$$

15. La solución general es:

$$x = c_1e^{2(1+\sqrt{5})t} + c_2e^{2(1-\sqrt{5})t}$$

$$y = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}c_1 e^{2(1+\sqrt{5})t} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}c_2 e^{2(1-\sqrt{5})t}$$

Las dos constantes c_1, c_2 se obtienen de hacer $t = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

16. Ecuación de Bernouilli. La solución general es

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{c + 3\sqrt{1+x^2}}$$

CAPITULO 3

1. $\forall x > 0$ es $f(|x|) = f(x) \Rightarrow \mathcal{L}f(|x|) = \mathcal{L}f(x)$. En general es $|f(x)| \neq f(x)$.

$$|e^x| = e^x \Rightarrow \mathcal{L}|e^x| = \mathcal{L}e^x.$$

2. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{p-a}$.

3. $y = \dfrac{1}{2}(2\operatorname{sen} x + \cos x + xe^x - e^x)$.

4. $2\operatorname{sen} 2x - \cos 2x + e^x$

5. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{p-3}$; $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$; $\dfrac{\pi}{2}$.

6. $y = -e^x$

7. $f(x) = \dfrac{e^{2x}(3x-2)}{9x}$.

8. $\dfrac{1}{x}\left(e^{-\frac{1}{2}x} - e^{\frac{1}{2}x}\right)$

9. $\dfrac{e^{\pi p}}{(p^2+1)(e^{\pi p}-1)}$

10. $x = 2 - e^t$; $y = e^t$. Sólo se cumple $x(0) = 1$. Por el método general, es $x = c - e^t$; $y = e^t$, donde c queda determinada con $x(0) = 1$.

CAPITULO 4

1. Pasar a la forma de Jacobi y sustituir en ella las derivadas respecto de x e y obtenidas derivando $u(x, y, z) = c$.

2. Los planos tangentes a $u = 0$ contienen a los vectores de componentes P, Q, R en los puntos de tangencia.

3.

a) $P = x(x + y)$.

b) Ver, por ejemplo, el problema número 4 de los resueltos.

4. $\mu = x^2 y$

5. $(4yz - e^z \cos y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(e^{x+z} - \dfrac{2z}{x}\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\cos y}{x} - 2ye^x$

6. $z = \dfrac{x}{y} f\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{2xy}$

7.

a) $Q = \dfrac{1}{2}(x + y^2 - z)$; $R = 3Q$. La ecuación se reduce a una de coeficientes constantes.

b) Naturalmente, lo son.

c) Eliminar x, y, z entre $x - 2y = c_1$, $z - 3y = c_2$ y las ecuaciones de la circunferencia.

8. $z = x^2 + c_1 y + c_2$

9. $z = f(x + y) + e^{-y} g(x)$.

10. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = f(2ix - y) + g(2ix + y)$.